

Examen de Matemáticas II (Junio 2019)
Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; se

pide:

- a) (1,5 puntos) Estudiar el rango de A en función del parámetro real a .
- b) (1 punto) Calcular, si es posible, la inversa de la matriz AM para el caso $a = 0$.

Solución:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^2 + a - 2 = 0 \implies a = 1 \text{ y } a = -2$. Luego si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \implies \text{Rango}(A) = 3$.

Si $a = -2 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$ y

$F_3 = -F_2 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

Si $a = 1 \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

0 , $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$.

En consecuencia $\text{Rango}(A) = 3$ si $a \in \mathbb{R} - \{1, -2\}$ y $\text{Rango}(A) = 2$ si $a = 1$ o $a = -2$.

b) Si $a = 0$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|AM| = -2 \neq 0 \implies \exists (AM)^{-1}:$$

$$(AM)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Dada $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota el logaritmo neperiano, definida para $x > 0$, se pide:

- (0,5 puntos) Calcular, en caso de que exista, una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$.
- (1 punto) Encontrar un punto de la curva $y = f(x)$ en el que la recta tangente a dicha curva sea horizontal y analizar si dicho punto es un extremo relativo.
- (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$ y $x = e$.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

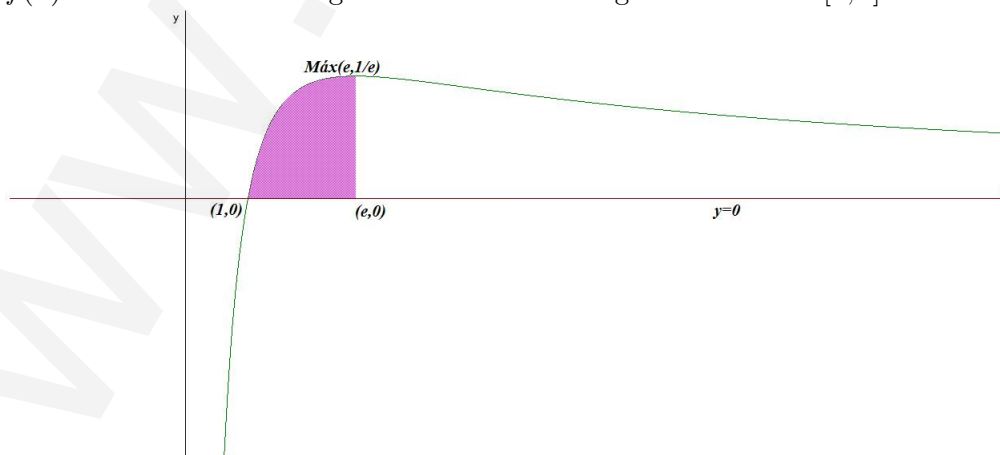
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \implies y = 0 \text{ por la derecha.}$$

b) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \implies 1 - \ln x = 0 \implies x = e$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘

La función crece en el intervalo $(0, e)$ y decrece en el intervalo $(e, +\infty)$.
Luego presenta un máximo relativo en el punto $(e, 1/e)$.

c) $f(x) = 0 \implies x = 1$ luego el intervalo de integración sería el $[1, e]$.



Aunque se trata de una integral inmediata de la solución por partes por las características de su resolución.

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x} dx \implies v = \ln x \end{array} \right] = (\ln x)^2 - \int \frac{1}{x} dx \implies$$

$$2 \int \frac{\ln x}{x} dx = (\ln x)^2 \implies F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$

De otra forma:

$$F(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ dx = x dt \end{array} \right] = \int \frac{t}{x} x dt = \int t dt \implies \frac{t^2}{2} dx =$$

$$\frac{(\ln x)^2}{2} + C \implies F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} \implies S = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = F(e) - F(1) = \frac{1}{2} u^2$$

Problema 3 (2,5 puntos) Dadas la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = z$ y la recta s que pasa por el punto $(2, -5, 1)$ y tiene dirección $(-1, 0, -1)$, se pide:

- (1 punto) Estudiar la posición relativa de las dos rectas.
- (1 punto) Calcular un plano que sea paralelo a r y contenga a s .
- (0,5 puntos) Calcular un plano perpendicular a la recta r y que pase por el origen de coordenadas.

Solución:

Tenemos: $r : \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, -2, 1) \\ P_r(1, 3, 0) \end{array} \right.$ y $s : \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_s = (-1, 0, -1) \\ P_s(2, -5, 1) \end{array} \right.$

a) $\overrightarrow{P_r P_s} = (2, -5, 1) - (1, 3, 0) = (1, -8, 1)$.

$$[\overrightarrow{P_r P_s}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 1 & -8 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \implies r \text{ y } s \text{ se cruzan.}$$

b) $\pi \parallel r \text{ y } s \subset \pi$:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_r = (2, -2, 1) \\ \vec{u}_s = (-1, 0, -1) \\ P_s(2, -5, 1) \end{array} \right. \implies \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y+5 & z-1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$\pi : 2x + y - 2z + 3 = 0$$

c) $\pi' \perp r$ y $O \in \pi'$:

$$\pi' : 2x - 2y + z + \lambda = 0 \implies 0 + 0 - 0 + \lambda = 0 \implies \lambda = 0, \text{ luego:}$$

$$\pi' : 2x - 2y + z = 0$$

Problema 4 (2,5 puntos) La probabilidad de que un pez de una determinada especie sobreviva más de 5 años es del 10 %. Se pide:

- a) (1 punto) Si en un acuario tenemos 10 peces de esta especie nacidos este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellos sigan vivos dentro de 5 años.
- b) (1,5 puntos) Si en un tanque de una piscifactoría hay 200 peces de esta especie nacidos este mismo año, usando una aproximación mediante la distribución normal correspondiente, hallar la probabilidad de que al cabo de 5 años hayan sobrevivido al menos 10 de ellos.

Solución:

- a) Se trata de una binomial $B(0, 1; 10)$:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = \\ 1 - \left(\binom{10}{0} 0,1^0 \cdot 0,9^{10} + \binom{10}{1} 0,1^1 \cdot 0,9^9 \right) &= \\ 1 - (0,348678 + 0,387420) &= 1 - 0,736098 = 0,263902 \end{aligned}$$

- b) Se trata de una distribución binomial $B(200; 0, 1)$ con $n = 200$, $p = 0, 1$ y $q = 1 - p = 0, 9$. Como $n > 10$, $np = 200 \cdot 0, 1 = 20 > 5$ y $nq = 200 \cdot 0, 9 = 180 > 5$ podemos aproximar esta binomial por una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(20; 4, 24)$.

$$\begin{aligned} P(X \geq 10) &= P(X > 9, 5) = P\left(Z > \frac{9, 5 - 20}{4, 24}\right) = P(Z > -2, 48) = \\ 1 - P(Z < -2, 48) &= 1 - (1 - P(Z < 2, 48)) = P(z < 2, 48) = 0, 9934 \end{aligned}$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2019) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2,5 puntos) Una estudiante pidió en la cafetería 3 bocadillos, 2 refrescos y 2 bolsas de patatas y pagó un total de 19 euros. Al mirar la cuenta comprobó que le habían cobrado un bocadillo y una bolsa de patatas de más. Reclamó y le devolvieron 4 euros. Para compensar el error, el vendedor le ofreció llevarse un bocadillo y un refresco por solo 3 euros, lo que suponía un descuento del 40 % respecto a sus precios originales. ¿Cuáles eran los respectivos precios sin descuento de un bocadillo, de un refresco y de una bolsa de patatas?

Solución:

Sea x el precio de un bocadillo, y el de un refresco y z el de una bolsa de patatas.

$$\begin{cases} 4x + 2y + 3z = 19 \\ x + z = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 19 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 4F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \implies \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 2 (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \sqrt{4x^2 - x^4}$, se pide:

- (0,5 puntos) Determinar su dominio.
- (1,5 puntos) Determinar sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- (0,5 puntos) Calcular los límites laterales. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$

Solución:

- $4x^2 - x^4 = x^2(2 - x)(2 + x) = 0 \implies x = 0, x = 2$ y $x = -2$.

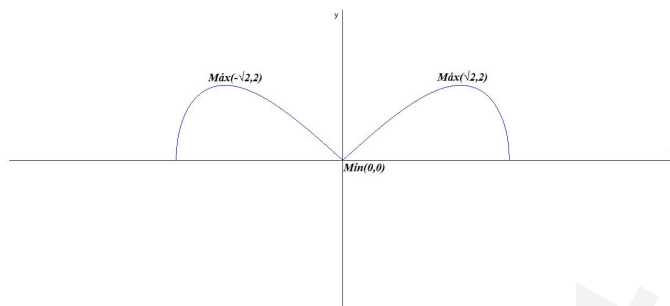
$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
—	+	+	—

$$\text{Dom}(f) = [-2, 2]$$

- $f'(x) = \frac{2x(2 - x^2)}{\sqrt{4x^2 - x^4}} = 0 \implies x(2 - x^2) = 0 \implies x = \pm\sqrt{2}$ y $x = 0$

	$(-2, -\sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, 0)$	$(0, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, 2)$
$f'(x)$	+	—	+	—
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗	decreciente ↘

Luego f decrece en el intervalo $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, 2)$ y crece en el intervalo $(-2, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$. Tendría un mínimo en el punto $(0, 0)$ y dos máximos en los puntos $(-\sqrt{2}, 2)$ y $(\sqrt{2}, 2)$.



$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = [t = -x] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t\sqrt{4-t^2}}{-t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4-t^2}}{-1} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 - x^4}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{4-x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4-x^2} = 2 \end{aligned}$$

Problema 3 (2,5 puntos) Dados el punto $A(2, 1, 0)$ y el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 4z = 36$, se pide:

- (0,75 puntos) Determinar la distancia del punto A al plano π .
- (1 punto) Hallar las coordenadas del punto del plano π más próximo al punto A .
- (0,75 puntos) Hallar el punto simétrico de A respecto al plano π .

Solución:

$$\text{a) } d(A, \pi) = \frac{|4 + 3 + 0 - 36|}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29} \text{ u}$$

- b) Calculamos la recta $t \perp \pi$ tal que $A \in t$:

$$t : \begin{cases} \vec{u}_t = (2, 3, 4) \\ P_t = A(2, 1, 0) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}$$

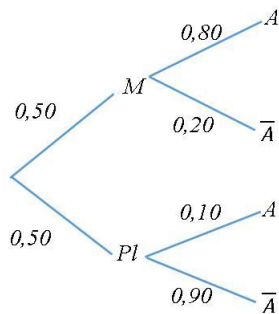
Calculamos el punto de corte A' de t con π : $2(2 + 2\lambda) + 3(1 + 3\lambda) + 4(4\lambda) = 36 \implies 29\lambda = 29 \implies \lambda = 1 \implies A'(4, 4, 4)$

$$\text{c) } \frac{A + A''}{2} = A' \implies A'' = 2A' - A = (8, 8, 8) - (2, 1, 0) = (6, 7, 8)$$

Problema 4 (2,5 puntos) Una compañía farmacéutica vende un medicamento que alivia la dermatitis atópica en un 80 % de los casos. Si un enfermo es tratado con un placebo, la probabilidad de mejoría espontánea es del 10 %. En un estudio experimental, la mitad de los pacientes han sido tratados con el medicamento y la otra mitad con un placebo.

- (1 punto) Determinar cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar haya mejorado.
- (1,5 puntos) Si un paciente elegido al azar ha mejorado, hallar la probabilidad de que haya sido tratado con el medicamento.

Solución:



a) $P(A) = P(A|M)P(M) + P(A|Pl)P(Pl) = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,1 = 0,45$

b) $P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \frac{0,8 \cdot 0,5}{0,45} = 0,889$