Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Mayo 2019

Problema 1 *(6 puntos).* Sean el plano $\pi : x - y + 3z - 1 = 0$ y la recta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$
se pide:

a) Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto $P(1, 3, -1)$.

b) Encontrar una recta t paralela a r que pase por P.

c) Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P

d) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π. En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.

e) Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r.

f) Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 3), \quad r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1) \\ P_r(-1, 0, 1) \end{array} \right.$$

a)

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 3) \\ P_s = P(1, 3, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{array} \right.$$

b)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} = (1, -1, 1) \\ P_t = P(1, 3, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array} \right.$$

c)

$$\pi' : x - y + 3z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 - 3 - 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 5$$

$$\pi' : x - y + 3z + 5 = 0 \Longrightarrow P \in \pi'$$

d)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow (-1+\lambda) - (-\lambda) + 3(1+\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$$

Luego la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(-\dfrac{6}{5},\dfrac{1}{5},\dfrac{4}{5}\right)$.

El ángulo que forman será $\beta = 90^{\text{o}} - \alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u_\pi} = (1,-1,3)$ y $\overrightarrow{u_r} = (1,-1,1)$:

$$\sin\beta = \frac{\overrightarrow{u_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_\pi}|\cdot|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{3}} \Longrightarrow \beta = 60^{\text{o}}30'14''$$

e)

$$\pi'': \begin{cases} \overrightarrow{u_\pi} = (1,-1,3) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r(-1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow \pi'': \begin{vmatrix} 1 & 1 & x+1 \\ -1 & -1 & y \\ 3 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x+y+1=0$$

f)

$$h: \begin{cases} x-y+3z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$$

Problema 2 *(4 puntos).* Sea el punto $P(2,0,1)$. Se pide

a) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi : x - y + z + 2 = 0$.

b) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r : \begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$

Solución:

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in t$:

$$t: \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,-1,1) \\ P_t = P(2,0,1) \end{cases} \Longrightarrow t: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π:

$$(2+\lambda) - (-\lambda) + (1+\lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{5}{3}$$

$$\begin{cases} x = 2 - 5/3 = 1/3 \\ y = 5/3 \\ z = 1 - 5/3 = -2/3 \end{cases} \Longrightarrow P'\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':
$$\frac{P''+P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$
$$\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{4}{3}\right) - (2,0,1) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

b) Segimos el siguiente procedimiento: $r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases} \Longrightarrow r :$
$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$

- Calculamos un plano $\pi \perp r / P \in \pi$:

$$-2x + y + 3z + \lambda = 0 \Longrightarrow -4 + 0 + 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$$

$$\pi : -2x + y + 3z + 1 = 0 \Longrightarrow \pi : 2x - y - 3z - 1 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π:

$$2(1 - 2\lambda) - (1 + \lambda) - 3(1 + 3\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{3}{14}$$
$$\begin{cases} x = 1 + 3/7 = 10/7 \\ y = 1 - 3/14 = 11/14 \\ z = 1 - 9/14 = 5/14 \end{cases} \Longrightarrow P'\left(\frac{10}{7}, \frac{11}{14}, \frac{5}{14}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':
$$\frac{P''+P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$
$$\left(\frac{20}{7}, \frac{11}{7}, \frac{5}{7}\right) - (2,0,1) = \left(\frac{6}{7}, \frac{11}{7}, -\frac{2}{7}\right)$$