Examen de Matemáticas 2º de Bachillerato CN

Diciembre 2018

Problema 1 Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2}$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 7} (\sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x})$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (\sqrt{5x^2 + 3x + 5} - \sqrt{5x^2 - 2x + 8}$
4. Calcular m sabiendo que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{(1 - mx)(2x + 3)}{x^2 + 4} = 6$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\ln(2x - 1)}{x^2 - \sqrt{x}}$
6. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

Solución:

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 7} (\sqrt{3x^2 + 2x + 2} - \sqrt{3x^2 + x} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (\sqrt{5x^2 + 3x + 5} - \sqrt{5x^2 - 2x + 8}) = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
4. Calcular m sabiendo que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{(1 - mx)(2x + 3)}{x^2 + 4} = 6 \Longrightarrow m = -3$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\ln(2x - 1)}{x^2 - \sqrt{x}} = \dfrac{4}{3}$
6. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$
7. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} = 0$

Problema 2 Calcular las rectas tangente y normal en los sigientes casos:

1. a la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 5}{x - 2}$ en el punto de abcisa $x = 1$.

2. a la función $f(x) = 5xe^{x-1}$ en el punto de abcisa $x = 1$.

3. En este caso sólo la recta o rectas tangentes la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x + 1}$ sabiendo que ésta o éstas son paralelas a la recta $y = 3x + 8$.

Solución:

1. $f(1) = -5$, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 3}{(x-2)^2} \Longrightarrow m = f'(1) = -6$:

$$\text{Recta tangente} : y + 5 = -6(x - 1)$$

$$\text{Recta normal} : y + 5 = \frac{1}{6}(x - 1)$$

2. $f(1) = 5$, $f'(x) = 5xe^{x-1}(x + 1) \Longrightarrow m = f'(1) = 10$:

$$\text{Recta tangente} : y - 5 = 10(x - 1)$$

$$\text{Recta normal} : y - 5 = -\frac{1}{10}(x - 1)$$

3. $m = f'(a) = 3$:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2} \Longrightarrow m = f'(a) = \frac{a^2 + 2a + 2}{(a+1)^2} = 3 \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} a = -1,7 \Longrightarrow b = f(-1,7) = -1,3 \Longrightarrow y + 1,3 = 3(x + 1,8) \\ a = -0,3 \Longrightarrow b = f(-0,3) = -2,7 \Longrightarrow y + 2,7 = 3(x + 0,3) \end{cases}$$

Problema 3 Calcular las siguientes integrales

1. Sabiendo que $f'(x) = 2x^2 + 5e^x$ encontrar la función primitiva que pasa por el punto $(0, 1)$

2. $\displaystyle\int \frac{1 + 3\ln x + (\ln x)^3}{x[1 - (\ln x)^2]}\,dx$ hacer cambio $t = \ln x$.

3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}\,dx$ hacer cambio $t = e^x$.

4. $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 2}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$

7. $\displaystyle\int 5x^2 e^{2x^3-1}\,dx$

Solución:

1. $f(x) = \frac{2x^3}{3} + 5e^x + C$ como $f(0) = 1 \Longrightarrow 5 + C = 1 \Longrightarrow C = -4$ luego $f(x) = \frac{2x^3}{3} + 5e^x - 4$.

2. $\displaystyle\int \frac{1 + 3\ln x + (\ln x)^3}{x[1-(\ln x)^2]}\,dx = -\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{5}{2}\ln|1-\ln x| - \frac{3}{2}\ln|1+\ln x| + C$

3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \ln|e^x+1| - \ln|e^x+2| + C$

4. $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx = -\frac{x^2}{2}\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$

5. $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 2}\,dx = x^2 - x + \frac{4}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + C$

6. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$

7. $\displaystyle\int 5x^2 e^{2x^3-1}\,dx = \frac{5}{6}e^{5x^3+8} + C$