Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Abril 2019

En estas soluciones mantengo las puntuaciones que se reflejaron en selectividad.

Problema 1 *(2,5 puntos)* Sean $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por:
$f(x) = \dfrac{|x|}{2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$,

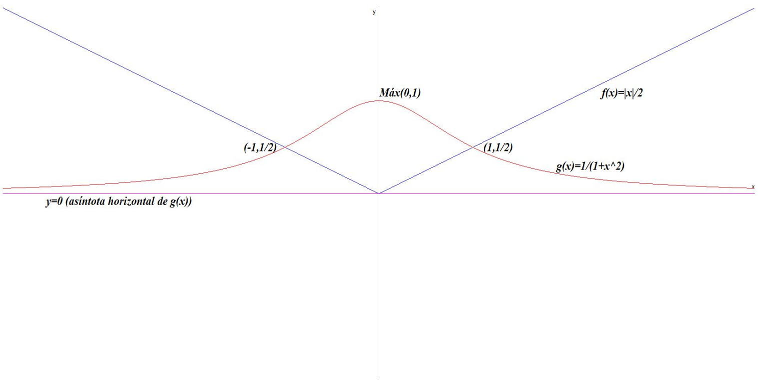
a) (1 punto) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) (1,5 puntos) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

(Junio 2014 Opción A - Andalucía)
Solución:

a)

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \le 0 \\[2ex] \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases} \qquad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

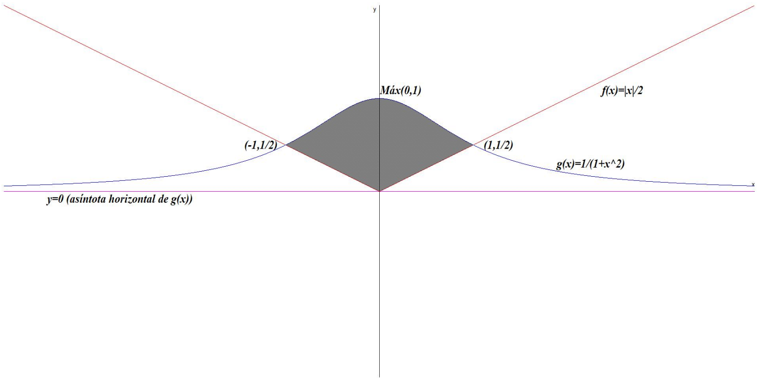


- Si $x \le 0$:

$$-\frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow -x(1+x^2) = 2 \Longrightarrow x^3+x+2 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

- Si $x > 0$:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{1+x^2} \Longrightarrow x(1+x^2) = 2 \Longrightarrow x^3+x-2 = 0 \Longrightarrow x = 1$$



b)

$$S_1 = \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \left.\frac{x^2}{4} - \arctan x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4}$$

$$S_2 = S_1 \Longrightarrow S = 2|S_1| = 2\left(\frac{\pi - 1}{4}\right) = \frac{\pi - 1}{2} \ u^2$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad -2 \le x \le -1 \\ \\ \frac{x^2-3}{2} & \text{si} \quad -1 < x \le 0 \end{cases}$$

a) (1 punto) Verifica que $f(x)$ es continua en el intervalo $[-2, 0]$ y derivable en el intervalo $(-2, 0)$

b) (0,5 puntos) ¿Qué dice el teorema del valor medio al respecto?

c) (0,5 puntos) Aplicar el teorema del valor medio al intervalo $[-2, 0]$

d) (0,5 puntos) Estudiar si la función es creciente o decreciente en los intervalos $(-2, -1)$ y $(-1, 0)$.

(Junio 2014 Opción B - Islas Baleares)
Solución:

a) Continuidad: Las ramas son continuas para cualquier valor, estudiamos en $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{1}{x} = -1 \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{x^2-3}{2} = -1 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$$

Luego la función es continua en $[2,0]$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2} & \text{si} \quad -2 \le x \le -1 \\ x & \text{si} \quad -1 < x \le 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(-1^-) = -1 \neq f'(-1^+) = -1$$

luego la función es derivable en $(-2,0)$.

b) Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el $(a,b) \Longrightarrow \exists\, c \in (a,b) \backslash f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

c) Sea $c \in (-2,0) \Longrightarrow f'(c) = \dfrac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = \dfrac{-3/2+1/2}{0+2} = -\dfrac{1}{2}$
Si $-2 < c < -1 \Longrightarrow f'(c) = \dfrac{-1}{c^2} = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow c = \sqrt{2}$ esta solución no es válida por no estar en el intervalo.
Si $-1 < c < 0 \Longrightarrow f'(c) = c = -\frac{1}{2}$ esta solución si es válida por estar en el intervalo.

d) En la rama $-2 < c < -1 \Longrightarrow f(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0\ \forall x \in (-2,-1) \Longrightarrow f$ es decreciente en este intervalo.
En la rama $-1 < c < 0 \Longrightarrow f(x) = x < 0\ \forall x \in (-1,0) \Longrightarrow f$ es decreciente en este intervalo.

Problema 3 *(2,5 puntos)*

a) (1,25 puntos) Usando el cambio de variable $t = \ln(x)$, determine el valor de la integral:

$$\int \frac{1+3\ln(x)+(\ln x)^3}{x[1-(\ln x)^2]}\,dx$$

b) (1,25 puntos) Determine el límite:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2}$$

(Junio 2014 Opción A - Aragón)

Solución:

a)

$$I(x) = \int \frac{1+3\ln(x)+(\ln x)^3}{x[1-(\ln x)^2]}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ dx = x\,dt \end{bmatrix} = \int \frac{1+3t+t^3}{x(1-t^2)}x\,dt =$$

$$\int \frac{t^3+3t+1}{1-t^2}dt = \int \left(-t+\frac{4t+1}{1-t^2}\right) dt = I(t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{4t+1}{1-t^2} = \dfrac{A}{1-t} + \dfrac{B}{1+t} = \dfrac{A(1+t)+B(1-t)}{1-t^2} \\ \\ 4t+1 = A(1+t)+B(1-t) \Longrightarrow \begin{cases} \text{si } t=1 \Longrightarrow 5=2A \Longrightarrow A=\frac{5}{2} \\ \text{si } t=-1 \Longrightarrow -3=2B \Longrightarrow A=-\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$I(t) = \int \left(-t+\frac{-3/2}{1-t}+\frac{5/2}{1+t}\right) dt = \frac{-t^2}{2} - \frac{3}{2}\ln|1-t| + \frac{5}{2}\ln|1+t| + C$$

$$I(x) = \frac{-(\ln x)^2}{2} - \frac{3}{2}\ln|1-\ln x| + \frac{5}{2}\ln|1+\ln x| + C$$

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} (\cos x)^{\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^2} = [1^\infty] = e^\lambda$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-\sin x}{2\sin x \cos x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}$$

Luego $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} (\cos x)^{\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^2} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-\frac{1}{2}}$

Problema 4 *(2,5 puntos)*

a) (1 punto) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) (0,75 puntos) Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ tiene soluciones positivas.

c) (0,75 puntos) ¿Tiene la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ alguna solución negativa? Razone la respuesta.

(Junio 2014 Opción B - Extremadura)
Solución:

a) Sea f una función real y continua en un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

b) Sea $f(x) = x^2 - 1 - \cos x$, f es una función continua y si consideramos el intervalo $[0, \pi]$ tenemos que $f(0) = -2 < 0$ y $f(\pi) = \pi^2 > 0$ por lo que cumple las condiciones del teorema de Bolzano y, por tanto, $\exists c \in (0, \pi)$ tal que $f(c) = 0$. Como $c \in (0, \pi) \Longrightarrow c$ es positivo.

c) Si consideramos ahora el intervalo $[-\pi, 0]$ tendríamos: $f(-\pi) = \pi^2 > 0$ y $f(0) = -2 < 0$ por lo que cumple las condiciones del teorema de Bolzano y, por tanto, $\exists c \in (-\pi, 0)$ tal que $f(c) = 0$. Como $c \in (-\pi, 0) \Longrightarrow c$ es negativo.

Problema 5 *(2,5 puntos)* Un agricultor hace un estudio para plantar árboles en una finca. Sabe que si planta 24 árboles la producción media de cada uno de ellos será de 600 frutos. Estima que por cada árbol adicional plantado, la producción de cada árbol disminuye en 15 frutos.

a) (2 puntos) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?

b) (0,5 puntos) ¿Cuál es esa producción?

(Junio 2014 Opción B - Asturias)
Solución:

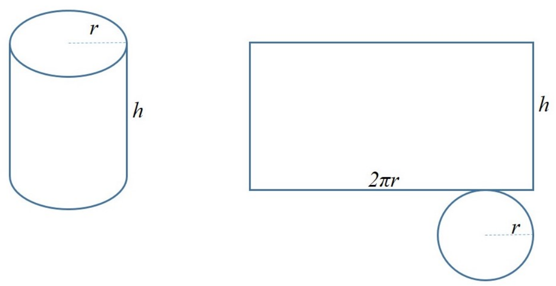
a) Es un problema de optimización, sea x : los árboles añadidos.
$f(x) = (24 + x)(600 - 15x) = -15x^2 + 240x + 14400$
$f'(x) = -30x + 240 = 0 \Longrightarrow x = 8$
$f''(x) = -30 \Longrightarrow f(8) = -30 < 0 \Longrightarrow x = 8$ árboles es un máximo. Añadiríamos 8 árboles por lo que habría 24+8=32 árboles para que la produción $(f(x))$ sea máxima.

b) $f(32) = (24 + 32)(600 - 15 \cdot 32) = 15360$ frutos.

Problema 6 *(2 puntos)* Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

(Junio 2014 Opción B - Andalucía)

Solución:



$$\begin{cases} V = \pi r^2 h = 125 \Longrightarrow h = \dfrac{125}{\pi r^2} \\ \\ S(r,h) = 2\pi r h + \pi r^2 \Longrightarrow S(r) = 2\pi r \dfrac{125}{\pi r^2} + \pi r^2 = \dfrac{250}{r} + \pi r^2 \end{cases}$$

$$S(r) = \frac{250 + \pi r^3}{r} \Longrightarrow S'(r) = \frac{2(\pi r^3 - 125)}{r^2} = 0 \Longrightarrow r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \simeq 3,414\ m$$

	$\left(0, \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)$	$\left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}, +\infty\right)$
$S'(r)$	$-$	$+$
$S(r)$	decreciente	creciente

$\Longrightarrow r = \dfrac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ es un mínimo

Sustituyendo tenemos:

$$h = \frac{125}{\pi r^2} = \frac{125}{\pi \left(\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}} \simeq 3,414\ m$$

Problema 7 *(2 puntos)* Sea f la función definida por $f(x) = x\ln(x+1)$ para $x > -1$ (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$. (Junio 2014 Opción B - Andalucía)
Solución:

$$I(x) = \int x\ln(x+1)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(x+1) \Longrightarrow du = \frac{1}{x+1} \\ dv = xdx \Longrightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \\ \int udv = uv - \int vdu \end{array}\right] =$$

$$\frac{x^2\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx = \frac{x^2\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$\frac{x^2\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) + C = \frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}x\left(\frac{x}{2} - 1\right) + C$$

Tenemos que

$$I(1) = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) + C = 0 \Longrightarrow C = \frac{1}{4}$$

Luego:

$$I(x) = \frac{(x^2-1)\ln(x+1)}{2} - \frac{1}{2}x\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{1}{4}$$