Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2017

Problema 1 *(2,5 puntos)* Se pide:

1. (1 punto) Discute para qué valores de k el siguiente sistema es compatible:
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & z = & 8 \\ 2x- & 3y+ & z = & -1 \\ 3x- & y+ & kz = & 5 \end{array}\right.$$

2. (1,5 puntos) Resolverlo para el caso (o casos) que sea compatible.

(Junio 2014 - Opción A (Islas Baleares))

Solución:

1. $\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & k & 5 \end{array}\right) \quad |A| = -7k = 0 \Longrightarrow k = 0$

   Si $k \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

   Si $k = 0$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 3 & -17 \\ 0 & -7 & 3 & -19 \end{array}\right) =$$
$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{rrr|r} 8 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -7 & 3 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{sistema incompatible.}$$

2. Resuelvo por Cramer:
$$x = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 8 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & k \end{array}\right|}{|A|} = \frac{-22k+2}{-7k} = \frac{22k-2}{7k}$$
$$y = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 8 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & k \end{array}\right|}{|A|} = \frac{-17k+6}{-7k} = \frac{17k-6}{-7k}$$
$$z = \frac{\left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{array}\right|}{|A|} = \frac{14}{-7k} = -\frac{2}{k}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Sea la matriz $A = \left(\begin{array}{ccc} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{array}\right)$

1. (1,5 puntos). Discutir su rango en función de los valores de a.

2. (1 punto) Para $a = 1$, resolver la ecuación matricial $A^T X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, siendo A^T la matriz traspuesta de A.

(Junio 2014 - Opción B (Castilla y León))
Solución:

1. $|A| = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & a+1 & a+2 \\ 1 & a+3 & a+4 \\ 1 & a+5 & a+6 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} =$
$a \begin{vmatrix} 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) < 3 \ \forall a \in \mathbb{R}$
$\begin{vmatrix} 1 & a+1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \ \forall a \in \mathbb{R}$
Observamos que si $a = 0$ tambien sería Rango$(A) = 2$.

2. Para $a = 1$:
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ y $|A^T| = |A| = 0$, luego el sistema:
$A^T X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 0 \\ 2x+ & 4y+ & 6z = & 0 \\ 3x+ & 5y+ & 7z = & 0 \end{cases}$ es un sistema compatible indeterminado $\Longrightarrow$
$\begin{cases} x+ & y+ & z = & 0 \\ 2x+ & 4y+ & 6z = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

1. (0,5 puntos) La matriz inversa A^{-1} de la matriz A.

2. (1 punto) La matriz X que es solución de la ecuación $AX = BC$.

3. (1 punto) El determinate de la matriz $2M^3$, siendo M una matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale $\dfrac{1}{2}$.

(Junio 2014 - Opción B (Comunidad Valenciana))

Solución:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $AX = BC \Longrightarrow X = A^{-1}BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

3. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow 2M = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix} \Longrightarrow |2M| = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} =$
$4\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4|M| = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$
$|2M^3| = |2M \cdot M \cdot M| = |2M||M||M| = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \cdot \dfrac{1}{2}$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.
(Junio 2002 - Opción A (Comunidad de Madrid))
Solución:
Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\left\{\begin{array}{lll} x-14= & 5(& y+z-28) \\ x+10= & & y+z+20 \\ x-42= & & y-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z= & -126 \\ x- & y- & z= & 10 \\ x- & y+ & z= & 42 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=44 \\ y=18 \\ z=16 \end{array}\right.$$