Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2018

Problema 1 *(2,5 puntos)* Discutir y resolver cuando sea posible, el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro m:

$$\left\{\begin{array}{rrr} mx+ & y = & 1 \\ x+ & my = & m \\ 2mx+ & 2y = & m+1 \end{array}\right.$$

(Junio 2014 - Opción A (Castilla y León))

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 2m & 2 & m+1 \end{array}\right) \quad |\overline{A}| = m^3 - m^2 - m + 1 = 0 \Longrightarrow m = 1, \ m =$$

-1 Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango(A), sería un sistema incompatible.

Si $m = 1$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$; la tres filas son proporcionales y el sistema sería compatible indeterminado.

Si $m = -1$:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$; las dos columnas de A son proporcionales y, por tanto, Rango$(A) = 1$. Mmientras que el Rango$(\overline{A}) = 2 \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Resolvemos para $m = 1$: $\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y = & 1 \\ x+ & y = & 1 \\ 2x+ & 2y = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x = 1-\lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado veintidós euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y seis bolígrafos, el coste es de catorce euros. Se pide:

1. (1,5 punto). Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

2. (1 punto). Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos ocho cuadernos y tres rotuladores.

(Junio 2014 - Opción A (Madrid))
Solución:
Sean x el precio de un cuaderno, y el precio de un rotulador y z el de un bolígrafo.

1. $$\left\{\begin{array}{c} 5x+2y+3z=22 \\ 2x+y+6z=14 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-6+9z \\ y=26-24z \end{array}\right.$$

2. $8x+3y=8(-6+9z)+3(26-24z)=30$ euros.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se pide:

1. (0,5 puntos) Calcule el detreminante de la matriz $A=\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$.

2. (1 punto) Calcule la matriz inversa de A.

3. (1 punto) Calcule el determinante de la matriz $B=\dfrac{1}{2}A^3$ sin obtener previamente B.

(Extremadura 2014 - Opción B (Extremadura))
Solución:

1. $|A|=2$.

2. $A^{-1}=\left(\begin{array}{ccc} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$.

3. $|B|=\left|\dfrac{1}{2}A^3\right|=\left|\dfrac{1}{2}A\right||A|^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cdot 2\cdot 2^2=1$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Responda a las siguientes cuestiones:

1. (1 punto) Demostrar que si A es una matriz cuadrada que satisface la igualdad $A^2=I$, donde I es la matriz identidad, entonces A es invertible y $(A^{-1})^2=I$.

2. (1,5 puntos) Calcular la expresión general de las matrices de la forma $A=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & 2 \end{array}\right)$ con $b\neq 0$ que satisfacen la igualdad $A^2=I$

(Junio 2014 - Opción B (Cataluña))

Solución:

1. $A^2 = I \Longrightarrow |A^2| = |I| \Longrightarrow |A||A| = 1 \Longrightarrow |A|^2 = 1 \Longrightarrow |A| = \pm 1 \neq 0 \Longrightarrow A$ es invertible.
$A^2 = I \Longrightarrow A \cdot A = I \Longrightarrow A = A^{-1} \Longrightarrow (A^{-1})(A^{-1}) = (A^{-1})^2 = I$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+2b \\ ac+2c & bc+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$
$\left\{ \begin{array}{l} a^2+bc = 1 \\ ab+2b = 0 \Longrightarrow b(a+2) = 0 \Longrightarrow b = 0 \text{ no vale}, \ \ a = -2 \\ ac+2c = 0 \\ bc+4 = 1 \Longrightarrow bc = -3 \Longrightarrow c = -3/b \end{array} \right. \Longrightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & b \\ -3/b & 2 \end{pmatrix}$$