Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2018

Problema 1 *(2,5 puntos)* Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (1,5 puntos). Calcular α de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultante tenga las misma soluciones que el sistema original.

2. (1 punto). Calcula las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea 4.

(Junio 2014 - Opción A (Andalucía))

Solución:

1. $\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$ $\left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}\right| = -1 \Longrightarrow \text{Rango}A = 2 = \text{Rango}(\overline{A}) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow SCI$.

   Añadimos la tercera ecuación:
   $\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \\ \alpha x+ & y- & 7z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 1 & -7 & \end{array}\right)$, $|A| = 11\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$

   Si $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

   Si $\alpha = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -7 & 1 \end{array}\right);\ |A| = 0;\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}\right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0;\ \ |A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 1 \end{array}\right| = 0;$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 1 \end{array}\right| = 0;\ \ |A_4| = \left|\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -7 & 1 \end{array}\right| = 0$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2.$

Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

Luego $\alpha = 0$

2. $\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \\ x+ & y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 25/3 \\ y = -11/3 \\ z = -2/3 \end{array}\right.$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Un comercio ha adquirido una partida de armarios y mesas. Los armarios han costado 649 euros cada uno de ellos y las mesas 132 euros cada una. El responsable del comercio no recuerda si el precio total ha sido de 2761 o 2716 euros.

1. (1,5 puntos) ¿Cuánto ha pagado exactamente? Razona la respuesta.
2. (1 punto) ¿Cuántos armarios y mesas ha comprado exactamente?

(Junio 2014 - Opción B (País Vasco))
Solución:
LLamamos x al número de armarios comprados e y al número de mesas.

1. Planteamos las siguientes ecuaciones:
   - $649x + 132y = 2761 \Longrightarrow y = \dfrac{2761 - 649x}{132}$
   - $649x + 132y = 2716 \Longrightarrow y = \dfrac{2716 - 649x}{132}$

   Damos valores naturales a x en ambas ecuaciones con lo que encontramos la solución $x = 1 \Longrightarrow y = 16$ y ha pagado 2761 euros.
2. Ha comprado un armario y 16 mesas.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$

1. (1,5 puntos). Determinar para qué valores del parámetro a la matriz A no tiene inversa.
2. (1 punto). Calcular, si es posible, la matriz inversa de A, para $a = -2$, y en caso de que no sea posible razonar por qué.

(Junio 2014 - Opción B (País Vasco))
Solución:

1. $|A| = 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$:
   Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$
   Si $a = 1$ o $a = -1 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.

2. Si $a = -2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices B que cumplan $ABA = A$.
(Junio 2014 - Opción B (Navarra))
Solución:
Estudiamos sus dimensiones: $A_{2\times 3} \cdot B_{m\times n} \cdot A_{2\times 3} = A_{2\times 3} \Longrightarrow m = 3$ y $n = 2 \Longrightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$:

$$ABA = A \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a-c & -a+c & b-d \\ e & -e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a - c = 1 \Longrightarrow c = a - 1 \\ -a + c = -1 \Longrightarrow c = a - 1 \\ b - d = 0 \Longrightarrow d = b \\ 0 = e \\ 0 = -e \\ f = 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ a-1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$