Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II-Coincidente (Junio 2018) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & m \end{pmatrix}$ y

$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

donde m es un parámetro real.

a) Determínense los valores de m para los que la matriz A es invertible.

b) Para $m = 0$ considérese la ecuación matricial $A \cdot X = B$. Exprésese X en función de A y B y calcúlese X.

Solución:

a) $|A| = 6 - 2m = 0 \Longrightarrow m = 3$. Luego si $m \neq 3 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Con $m = 0$: $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ -1 & 3/2 \\ 1 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

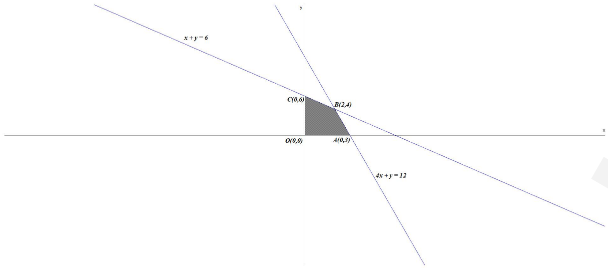
$$x + y \leq 6, \quad 4x + y \leq 12, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = \dfrac{8x + 3y}{5}$ en S, indicando los puntos de la región en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) $S : \begin{cases} x + y \leq 6 \\ 4x + y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ La región S y los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(2, 4)$, y $C(0, 6)$



b) $f(x,y) = \dfrac{8x+3y}{5}$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \text{ Mínimo} \\ f(3,0) = 24/5 \\ f(2,4) = 28/5 \text{ Máximo} \\ f(0,6) = 18/5 \end{array}\right.$$

El máximo es $28/5$ y se alcanza en el punto $B(2,4)$. El mínimo es 0 y se alcanza en el punto $O(0,0)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

a) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Hállese el área de la región limitada por el eje de abscisas, las rectas $x = 0$ y $x = 1$ y la gráfica de $f'(x)$, siendo f' la función derivada de f.

Solución:

a) $b = f(0) = 1$, $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} \Longrightarrow m = f'(0) = -1 \Longrightarrow y - 1 = -x \Longrightarrow y = -x + 1$

b) La función $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2}$ no corta el eje OX luego $S_1 : [0,1]$

$$S_1 = \int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$S = |S_1| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}\ u^2$$

Problema 4 *(2 puntos)* Se toma un coche al azar de la Comunidad de Madrid. Se sabe que la probabilidad de que tenga motor diésel es 0,4. La probabilidad de que tenga más de 8 años es 0,5. Finalmente, se sabe que la probabilidad de que tenga más de ocho años o motor diésel es 0,55. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Tenga motor diésel sabiendo que tiene más de ocho años.

b) No tenga motor diésel ni tenga más de ocho años.

Solución:
D : motor diésel y $M8$: tenga más de 8 años, $P(D) = 0,4$, $P(M8) = 0,5$ y $P(D \cup M8) = 0,55$

a) $P(D|M8) = \dfrac{P(D \cap M8)}{P(M8)} = \dfrac{P(D) + P(M8) - P(D \cup M8)}{P(M8)} = \dfrac{0,4 + 0,5 - 0,55}{0,5} = 0,7$.

b) $P(\overline{D} \cap \overline{M8}) = P(\overline{D \cup M8}) = 1 - P(D \cup M8) = 1 - 0,55 = 0,45$

Problema 5 *(2 puntos)* El tiempo diario, medido en horas (h), que pasa una persona de 18 años viendo la televisión, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 0,25$ h.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 15 individuos y se obtiene una media muestral $\overline{X} = 2$ h. Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 2$ h. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 20 individuos, el tiempo medio de visionado diario de televisión, $\overline{X}$, esté entre 1,85 y 2,15 horas.

Solución:

a) $\sigma = 0,25$, $n = 15$, $\overline{X} = 2$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{0,25}{\sqrt{15}} = 0,127$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (2 - 0,127, 2 + 0,127) = (1,873; 2,127)$$

b) $n = 20$, $\mu = 2 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(2; 0,056)$

$P(1,85 \leq \overline{X} \leq 2,15) = P\left(\dfrac{1,85 - 2}{0,056} \leq Z \leq \dfrac{2,15 - 2}{0,056}\right) = P(-2,68 \leq Z \leq 2,68) = P(Z \leq 2,68) - (1 - P(Z \leq 2,68)) = 2P(Z \leq 2,68) - 1 = 0,9926$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II-Coincidente (Junio 2018) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x+y+z & =1\\ x+2y+z & =2\\ x-y+az & =-1\end{array}\right.$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a=0$.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a & -1\end{array}\right);\quad |A|=3a=0\Longrightarrow a=0$$

- Si $a\neq 0\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow \text{Rango}(A)=3=\text{Rango}(\overline{A})=$ n^o de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a=0$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{array}\right)=\left[\begin{array}{c} F_1\\ 2F_2-F_1\\ 2F_3-F_1\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 3\\ 0 & -3 & -1 & -3\end{array}\right)=$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1\\ F_2\\ F_3+F_2\end{array}\right]=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Longrightarrow$$

Sistema compatible indeterminado.

b) Si $a=0$:

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+z=1\\ 3y+z=3\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{\lambda}{3}\\ \\ y=\dfrac{3-\lambda}{3}\\ \\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Considérese la función real de variable real:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} x+1 & \text{si}\quad x<0\\ \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si}\quad x\geq 0\end{array}\right.$$

a) Determínese si $f(x)$ es una función continua en todo su dominio.

b) Calcúlense sus asíntotas horizontales y oblicuas, si las tuviese.

Solución:

a)
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}(x+1)=1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=-1 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x=0$, en ese punto hay un salto. Luego f es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

b) Si $x<0$: No hay asíntotas, la función es una recta.
Si $x\geq 0$: La función no tiene asíntotas verticales porque el denominador no se anula nunca, si tendría una horizontal en $y=1$
$\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=1\Longrightarrow y=1$ y, por tanto, no habría oblicuas en esta rama.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=2x^3+15x^2+36x$$

a) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Solución:

a) $f'(x)=6x^2+30x+36=0\Longrightarrow x=-3$ y $x=-2$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-2)$	$(-2,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-3)\cup(-2,\infty)$, y es creciente en el intervalo $(-3,-2)$.

b) Tiene un Máximo en $(-3,-27)$ y un Mínimo en $(-2,-28)$.

Problema 4 *(2 puntos)* Entre los músicos que ensayan en un determinado local de Madrid, un 30 % sabe tocar la batería, un 80 % sabe tocar la guitarra y un 20 % sabe tocar tanto la batería como la guitarra. Se elige uno de esos músicos al azar. Calcúlese la probabilidad de que:

a) No sepa tocar la batería si se conoce que sabe tocar la guitarra.

b) Conocido que no sabe tocar la guitarra, no sepa tocar la batería.

Solución:
B: sabe tocar la batería, G: sabe tocar la guitarra.
$P(B) = 0,3$, $P(G) = 0,8$ y $P(B \cap G) = 0,2$

a) $P(\overline{B}|G) = \dfrac{P(\overline{B} \cap G)}{P(G)} = \dfrac{P(G) - P(B \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,8 - 0,2}{0,8} = 0,75$

b) $P(\overline{B}|\overline{G}) = \dfrac{P(\overline{B} \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \dfrac{P(\overline{B \cup G})}{1 - P(G)} = \dfrac{1 - P(B \cup G)}{1 - 0,8} = \dfrac{1 - (P(B) + P(G) - P(B \cap G))}{0,2} =$
$\dfrac{1 - (0,3 + 0,8 - 0,2)}{0,2} = 0,5$

Problema 5 *(2 puntos)* El peso en kilogramos (kg) del ejemplar de lubina de estero tras un mes de crianza, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ kg y desviación típica $\sigma = 0,2$ kg.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor que 0,05 kg, con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño 20, la suma total de sus pesos sea mayor que 32 kg, sabiendo que $\mu = 1,5$ kg.

Solución:

$$N(\mu; 0,2)$$

a) $E = 0,05$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,05 = 1,96\frac{0,2}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,2}{0,05}\right)^2 = 61,47 \Longrightarrow n = 62$$

b) $n = 20$, $\mu = 1,5 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(1,5; 0,045)$ y $\overline{X} = \dfrac{32}{20} = 1,6$
$P(\overline{X} \geq 1,6) = P\left(Z \geq \dfrac{1,6 - 1,5}{0,045}\right) = P(Z \geq 2,22) = 1 - P(Z \leq 2,22) = 1 - 0,9868 = 0,0132$