Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2018) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$

a) Compruébese que B es la matriz inversa de A.

b) Calculése la matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Solución:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \cdot B = I \Longrightarrow B = A^{-1}$

b) $A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B = B^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -48 & 17 \end{pmatrix}$

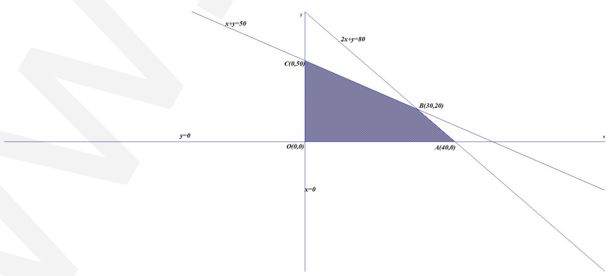
Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \le 50, \quad 2x + y \le 80, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Obténgase el valor máximo de la función $f(x, y) = 5x + 4y$ en la región S, indicando el punto en el cual se alcanza dicho valor máximo.

Solución:



a) $S : \begin{cases} x + y \le 50 \\ 2x + y \le 80 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ La región S y los vértices a estudiar serán: $O(0, 0)$, $A(40, 0)$, $B(30, 20)$, y $C(0, 50)$

b) $f(x,y) = 5x + 4y$

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(40,0) = 200 \\ f(30,20) = 230 \text{ Máximo} \\ f(0,50) = 200 \end{cases}$$

El máximo es 230 y se alcanza en el punto $B(30,20)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & \text{si} \quad x \le 2 \\ \\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Estúdiese si $f(x)$ es continua en $x = 2$.

b) Calcúlese la función derivada de $f(x)$ para $x < 2$.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \dfrac{x+2}{x-1} = 4 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2^+} \dfrac{3x^2-2x}{x+2} = 2 \end{cases}$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x = 2$, en ese punto hay un salto.

b) Si $x < 2$: $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$

Problema 4 *(2 puntos)* En una agencia de viajes se ha observado que el 75 % de los clientes acude buscando un billete de transporte, el 80 % buscando una reserva de hotel. Se ha observado además que el 65 % busca las dos cosas. Elegido un cliente de dicha agencia al azar, calcúlese la probabilidad de que:

a) Acuda buscando un billete de transporte o una reserva de hotel.

b) Sabiendo que busca una reserva de hotel, también busque un billete de transporte.

Solución:

T : buscan billete de transporte y H : buscan billete de hotel, $P(T) = 0,75$, $P(H) = 0,8$ y $P(T \cap H) = 0,65$

a) $P(T \cup H) = P(T) + P(H) - P(T \cap H) = 0,75 + 0,8 - 0,65 = 0,9$

b) $P(T|H) = \dfrac{P(T \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0,65}{0,8} = 0,8125$

Problema 5 *(2 puntos)* La empresa Dulce.SA produce sobres de azúcar cuyo peso en gramos se puede aproximar por una variable aleatoria X con distribución normal con media μ gramos y desviación típica $\sigma = 0,5$ gramos.

a) Determínese el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 0,25 gramos con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 25 sobres, la media muestral, $\overline{X}$, pese más de 12,25 gramos, sabiendo que $\mu = 12$ gramos.

Solución:

a) $E = 0,25$, $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 0,25 = 1,96\frac{0,5}{\sqrt{n}} \Longrightarrow$$

$$n \geq \left(\frac{1,96 \cdot 0,5}{0,25}\right)^2 = 15,37 \Longrightarrow n = 16$$

b) $n = 25$, $\mu = 12 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(12; 0,1)$

$P(\overline{X} \geq 12,25) = P\left(Z \geq \dfrac{12,25 - 12}{0,1}\right) = P(Z \geq 2,5) = 1 - P(Z \leq 2,5) = 1 - 0{,}9938 = 0,0062$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Junio 2018) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + ay + z &= 1 \\ ax + y + (a-1)z &= a \\ x + y + z &= a + 1 \end{cases}$$

a) Discútase en función de los valores del parámetro a.

b) Resuélvase para $a = 3$.

Solución:

a)
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a-1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a+1 \end{array}\right); \quad |A| = 1 - a = 0 \Longrightarrow a = 1$$

- Si $a \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

  Sistema incompatible

b) Si $a = 3$:
$$\left\{\begin{array}{c} x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 3 \\ x + y + z = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -13/2 \\ y = -3/2 \\ z = 12 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$$

a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ y asíntotas:

- Verticales: $x = -1$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{array}\right.$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{(x+1)^2}=\infty$$

- Oblícuas: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{x^3+2x^2+x}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+2x+1}-x\right)=-2$$

$$y=x-2$$

b) $f'(x)=\dfrac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}=0\Longrightarrow x=0,\ x=-3$

	$(-\infty,-3)$	$(-3,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	creciente $\nearrow$	decreciente $\searrow$	creciente $\nearrow$	creciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-3,-1)$, y es creciente en el intervalo $(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$. Tiene un Máximo en $(-3,-27/4)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x)=2x^3-5x^2+3x$$

a) Calcúlese el área del recinto acotado limitado por la gráfica de la función $f(x)$ y el eje OX.

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

Solución:

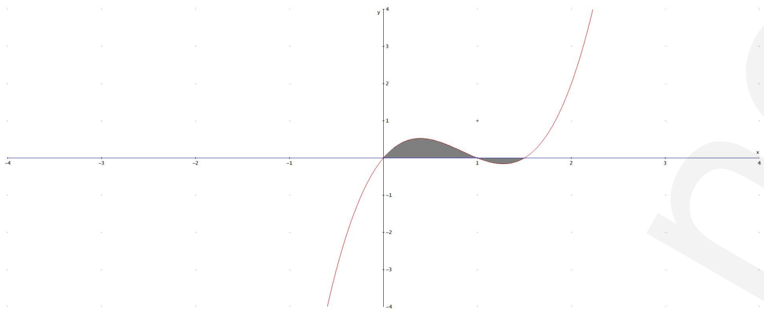
a) La función f corta al eje de abcisas en los puntos:
$2x^3-5x^2+3x=0\Longrightarrow x=0,\ \ x=1$ y $x=3/2$, luego tendremos los recintos $S_1:[0,1]$ y $S_2:[1,3/2]$.

$$F(x)=\int(2x^3-5x^2+3x)\,dx=\frac{x^4}{2}-\frac{5x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}$$

$$S_1=\int_0^1(2x^3-5x^2+3x)\,dx=F(1)-F(0)=\frac{1}{3}$$

$$S_2=\int_1^{3/2}(2x^3-5x^2+3x)\,dx=F(3/2)-F(1)=-\frac{5}{96}$$

$$S=|S_1|+|S_2|=\frac{1}{3}+\frac{5}{96}=\frac{37}{96}\ u^2$$



b) La ecuación de una recta en su ecuación punto pendiente es $y - b = m(x - a)$ donde $b = f(a) = f(0) = 0$. La derivada de la función es $f'(x) = 6x^2 - 10x + 3 \Longrightarrow m = f'(a) = f'(0) = 3$, luego la ecuación de la recta tangente es:

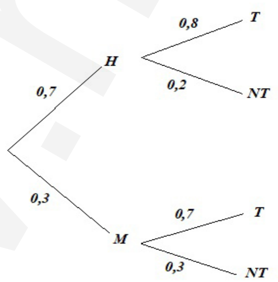
$$y = 3x$$

Problema 4 *(2 puntos)* En una comunidad de vecinos en el 70 % de los buzones aparece en primer lugar un nombre masculino y en el 30 % restante un nombre femenino. En dicha comunidad, la probabilidad de que un hombre trabaje es de 0,8 y la probabilidad de que lo haga una mujer es 0,7. Se elige un buzón al azar, calcúlese la probabilidad de que el primer nombre en el buzón corresponda a:

a) Una persona que trabaja.

b) Un hombre, sabiendo que es de una persona que trabaja.

Solución:



a) $P(T) = P(T|H)P(H) + P(T|M)P(M) = 0,8 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,77$

b) $P(H|T) = \dfrac{P(T|H)P(H)}{P(T)} = \dfrac{0,8 \cdot 0,7}{0,77} = 0,727$

Problema 5 *(2 puntos)* El número de descargas por hora de cierta aplicación para móviles, se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ descargas y desviación típica $\sigma = 20$ descargas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 40 horas, obteniéndose una media muestral de 99,5 descargas. Determínese un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Supóngase que $\mu = 100$ descargas. Calcúlese la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 horas, la media muestral, $\overline{X}$, esté entre 100 y 110 descargas.

Solución:

$$N(\mu; 20)$$

a) $\sigma = 20$, $n = 40$, $\overline{X} = 99,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{20}{\sqrt{40}} = 6,198$$

$IC = (\overline{X}-E, \overline{X}+E) = (99,5-6,198, 99,5+6,198) = (93,302; 105,698)$

b) $n = 10$, $\mu = 100 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(100; 6,32)$

$P(100 \le \overline{X} \le 110) = P\left(\frac{100-100}{6,32} \le Z \le \frac{110-100}{6,32}\right) = P(0 \le Z \le 1,58) = P(Z \le 1,58) - P(Z \le 0) = 0,9429 - 0,5 = 0,4429$