

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Modelo 2018)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos**

Problema 1 (2 puntos) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$

- a) Determinése para qué valores de a para los que la matriz A es invertible.
- b) Para $a = 1$, despégese y determinése la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot X = A + 2Id$, donde Id representa la matriz identidad de orden 3.

Solución:

- a) $|A| = 2a^3 = 0 \implies a = 0$ La matriz será invertible para cualquier valor de $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- b) Para $a = 1$: $A \cdot X = A + 2Id \implies X = A^{-1}(A + 2Id) = Id + 2A^{-1}$:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

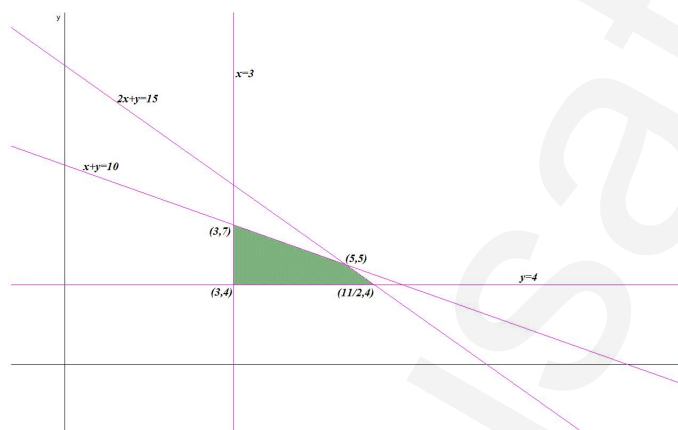
Problema 2 (2 puntos) Una bodega desea fijar el precio de venta al público de las 250 botellas de vino blanco y de las 500 de vino tinto que tiene en stock. Para no incurrir en pérdidas saben que el precio de venta al público de la botella de vino blanco debe ser como mínimo de 3 euros, de la misma manera el precio de venta al público de la botella de vino tinto debe ser de, como mínimo, 4 euros. Además saben que, para ser competitivos con esos precios de venta al público, el coste de 2 botellas de vino blanco y una de tinto debería ser a lo sumo 15 euros. Por el mismo motivo, el coste total de una botella de vino blanco y una de tinto no debe sobrepasar los 10 euros. Determinése los respectivos precios de venta al público por unidad de las botellas de vino blanco y de las de vino tinto, para que el ingreso total al vender el stock de 250 botellas de vino blanco y 500 de vino tinto sea máximo.

Solución:

Sea x el precio del vino blanco e y el precio del tinto.

- a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 250x + 500y$ calculando su máximo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x \geq 3 \\ y \geq 4 \\ 2x + y \leq 15 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$



La región S y los vértices a estudiar serán: $(3, 4)$, $(11/2, 4)$, $(5, 5)$, y $(3, 7)$:

- b)

$$\begin{cases} f(3, 4) = 2750 \\ f(11/2, 4) = 3375 \\ f(5, 5) = 3750 \\ f(3, 7) = 4250 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El máximo beneficio es 4250 euros y se alcanza vendiendo la botella de vino blanco a 3 euros y la de tinto a 7 euros.

Problema 3 (2 puntos) Se considera la función real de variable real

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16$$

- a) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.
- b) Calcúlese el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = -2$ y $x = 3$.

Solución:

- a) La ecuación de una recta en su ecuación punto pendiente es $y - b = m(x - a)$ donde $b = f(a) = f(1) = 8$. La derivada de la función es $f'(x) = 12x^2 - 24x \implies m = f'(a) = f'(1) = -12$, luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 8 = -12(x - 1)$$

- b) La función f corta al eje de abscisas en los puntos $x = -1$ y $x = 2$, por lo que habrá tres recintos $S_1 : [-2, -1]$, $S_2 : [-1, 2]$ y $S_3 : [2, 3]$.

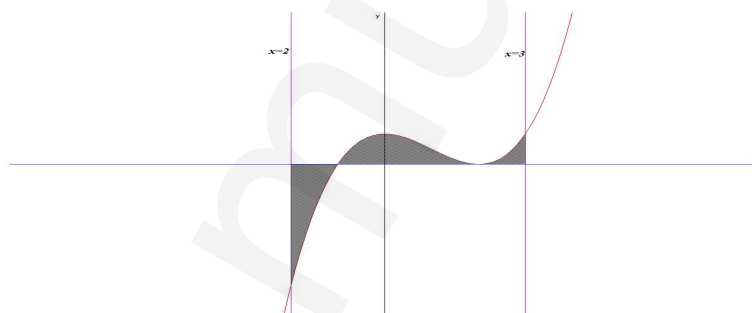
$$F(x) = \int (4x^3 - 12x^2 + 16) dx = x^4 - 4x^3 + 16x$$

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (4x^3 - 12x^2 + 16) dx = F(-1) - F(-2) = -27$$

$$S_2 = \int_{-1}^2 (4x^3 - 12x^2 + 16) dx = F(2) - F(-1) = 27$$

$$S_3 = \int_2^3 (4x^3 - 12x^2 + 16) dx = F(3) - F(2) = 5$$

$$S = |S_1| + |S_2| + |S_3| = 27 + 27 + 5 = 59 \text{ u}^2$$



Problema 4 (2 puntos) Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,4; \quad P(B) = 0,5; \quad P(A|B) = 0,7$$

Calcúlese:

- a) $P(A \cup B)$.
b) $P(\bar{A}|B)$

Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario de S.

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A \cap B) = 0,7 \cdot 0,5 = 0,35 \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,5 - 0,35 = 0,55 \\ \text{b) } P(\bar{A}|B) &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5 - 0,35}{0,5} = 0,3 \end{aligned}$$

Problema 5 (2 puntos) Un determinado partido político desea estimar la proporción de votantes, p , que actualmente se decantaría por él.

- Asumiendo que $p = 0,5$, determínese el tamaño mínimo necesario de una muestra de votantes para garantizar que, con una confianza del 90 %, el margen de error en la estimación no supere el 2 % ($\pm 2\%$).
- Se tomó una muestra aleatoria simple de 1200 votantes de los cuales 240 afirmaron que votarían por el partido en cuestión. Obténgase un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de votantes de ese partido en la población.

Solución:

$$\text{a) } p = 0,5, z_{\alpha/2} = 1,645$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1,645 \sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{n}} = 0,02 \implies$$

$$n \geq \left(\frac{1,645 \cdot 0,5}{0,02} \right)^2 = 1691,27 \implies n = 1692$$

b)

$$p_r = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5} \implies q_r = 1 - p_r = \frac{4}{5} \text{ y } z_{\alpha/2} = 1,96 :$$

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_r \cdot q_r}{n}} = 1,96 \sqrt{\frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{1200}} = 0,023$$

$$IC = (p_r - E, p_r + E) = (0,1774; 0,2226)$$

Entre el 17,74 % y el 22,26 %

**Examen de Matemáticas Aplicadas a las
CC. Sociales II (Modelo 2018)
Selectividad-Opción B**

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 (2 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 3y + az = a + 4 \end{cases}$$

- a) Discútase en función de los valores del parámetro a .
b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & a & a+4 \end{array} \right); \quad |A| = 3 - a = 0 \implies a = 3$$

- Si $a \neq 3 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = \text{n}^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{array} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \implies \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $a = 1$:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ 5x + 3y + z = 5 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Problema 2 (2 puntos) Se considera la función real de variable real: $f(x) = \frac{3x^2 + 3}{x}$

- a) Calcúlense el dominio y las asíntotas de $f(x)$.
b) Determinénse sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ y asíntotas:

- Verticales: $x = 0$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^2 + 3}{x} = \left[\frac{3}{0^-} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^2 + 3}{x} = \left[\frac{3}{0^+} \right] = +\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3}{x} = \infty$$

- Oblícuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 3}{x^2} = 3$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 3}{x} - 3x \right) = 0$$

$$y = 3x$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{3(x^2 - 1)}{x^2} = 0 \implies x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	creciente ↗	decreciente ↘	creciente ↗

La función es decreciente en el intervalo $(-1, 0) \cup (0, 1)$, y es creciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Tiene un Máximo en $(-1, -6)$ y un mínimo en $(1, 6)$.

Problema 3 (2 puntos) El beneficio diario (en miles de euros) de una empresa productora de cemento viene dado por la función:

$$f(x) = -2x^2 + 14x - 12$$

donde x expresa las toneladas de cemento producidos al día. Se sabe que la producción diaria de cemento está entre 0 y 8 toneladas, es decir, $x \in [0, 8]$.

- Calcúlense $f(0)$ y $f(8)$ e interprétense los resultados en el contexto del problema. Hállense las toneladas de cemento que deben producirse diariamente para obtener el máximo beneficio posible.
- Determinése entre qué valores debe estar la producción diaria de cemento para que la empresa no tenga pérdidas.

Solución:

- a) $f(0) = -12$ quiere decir que si la empresa no produce nada incurre en pérdidas de 12000 euros diarios. $f(8) = -28$ quiere decir que la empresa tendría unas pérdidas de 28000 euros (sobreproducción) Calculamos la cantidad de toneladas para obtener un beneficio máximo: $f'(x) = -4x + 14 = 0 \Rightarrow x = 3,5$ por la segunda derivada $f''(x) = -4 \Rightarrow f''(3,5) = -4 < 0 \Rightarrow x = 3,5$ es un máximo. En conclusión: El beneficio máximo se produce con 3,5 toneladas y será de $f(3,5) = 12500$ euros.
- b) La empresa no tendría ni ganancias ni pérdidas cuando $f(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 14x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$ tonelada o $x = 6$ toneladas.

Problema 4 (2 puntos) Se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$P(A) = 0,3; \quad P(B) = 0,8; \quad P(A \cup B) = 0,9$$

Calcúlese:

- a) $P(\bar{A}|B)$
b) $P(A|\bar{B})$

Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario de S .

Solución:

$$\text{a) } P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,8 - 0,2}{0,8} = 0,75$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,3 + 0,8 - 0,9 = 0,2$$

$$\text{b) } P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,3 - 0,2}{1 - 0,8} = 0,5$$

Problema 5 (2 puntos) El peso, en kilogramos, de los niños de diez años en la comunidad de Madrid se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de μ desconocida y desviación típica $\sigma = 3$ kilogramos.

- a) Calcúlese un intervalo de confianza al 95 % para μ si se ha tomado una muestra aleatoria simple de 9 niños de diez años y se han obtenido los siguientes pesos en kilogramos:

37, 40, 42, 39, 41, 40, 39, 42, 40

- b) Determinése el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media muestral sea menor que 1 kilogramo con un nivel de confianza 98 %.

Solución:

$$N(\mu; 3)$$

- a) $\sigma = 3$, $n = 9$, $\bar{X} = 40$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \frac{3}{\sqrt{9}} = 1,96$$

$$IC = (\bar{X} - E, \bar{X} + E) = (40 - 1,96, 40 + 1,96) = (38,04; 41,96)$$

- b) $E = 1$ y $z_{\alpha/2} = 2,325$

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325 \frac{3}{\sqrt{n}} = 1 \implies n \geq (3 \cdot 2,325)^2 = 48,65 \implies n = 49$$