Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Marzo 2018

Problema 1 *(2,5 puntos)* El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años), viene dado por la función siguiente:

$$f(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000, \quad 0 \le t \le 11$$

a) Calcular la cantidad de agua almacenada en el último año ($t = 11$)

b) Determinar el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo.

c) Hallar el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de este periodo.

Solución:

a) $f(11) = 11^3 - 24 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8000 = 8407$ millones de litros.

b) $f'(t) = 3t^2 - 48t + 180 = 0 \Longrightarrow t = 6$ y $t = 10$:
$f(0) = 8000$, $f(6) = 8432$, $f(10) = 8400$ y $f(11) = 8407$ luego el máximo se produce en el sexto mes del año.

c) El volumen máximo fué de 8432 millones de litros.

Problema 2 *(2,5 puntos)* Sea $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b$, a un valor real positivo.

a) Determinar a y b sabiendo que la curva $y = f(x)$ pasa por el punto $(1, 1)$ y la recta tangente en dicho punto tiene pendiente 12.

b) Tomando $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = -\dfrac{1}{3}$, calcule $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{3f(x)}{x^2 - 1}$

Solución:

$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2$ y $a \ge 0$.

a) $$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 1 \Longrightarrow 1 - 3a + 3a^2 + b = 1 \Longrightarrow -3a + 3a^2 + b = 0 \\ f'(1) = 12 \Longrightarrow 3 - 6a + 3a^2 = 12 \Longrightarrow 3a^2 - 6a - 10 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = 3 \ \text{ y } \ a = -1 \ \text{ no válida } \ (a \ge 0) \\ b = -18 \end{array}\right.$$

b) Si $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = -\dfrac{1}{3} \Longrightarrow f(x) = x^3 - x^2 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{3f(x)}{x^2-1} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{3x^3 - 3x^2 + x - 1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(3x^2+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{3x^2+1}{x+1} = 2$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x < 0$, $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ y cuando $x \geq 0$, $f(x) = ax + b$.

a) Halle los coeficientes a y b para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$ y a la vez corte al eje OX en $x = \dfrac{3}{2}$.

b) Encuentre los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX y calcule el área de la región límitada por la curva $f(x)$ y el eje OX entre dichos puntos.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Continua en $x = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} (-x^2 - 2x + 3) = 3 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} (ax + b) = b \end{array} \right. \Longrightarrow b = 3$$

Pasa por el punto $(3/2, 0) \Longrightarrow f(3/2) = \dfrac{3}{2}a + b = 0 \Longrightarrow a = -2$

b) Los puntos de corte con el eje OX:

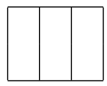
- Si $x < 0$: $-x^2 - 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -3$ y $x = 1$ (no válida)
- Si $x \geq 0$: $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$

Luego los puntos de corte son: $(-3, 0)$ y $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ El área será la comprendida entre estos puntos:

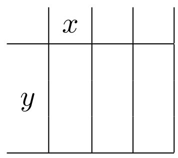
$$S = \int_{-3}^{0} (-x^2 - 2x + 3)\,dx + \int_{0}^{3/2} (-2x + 3)\,dx =$$

$$\left. -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^{0} + \left. -x^2 + 3x \right]_{0}^{3/2} = \frac{45}{4}\ u^2$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Un solar rectangular de $11250\, m^2$ se divide en tres zonas rectangulares iguales (ver dibujo) para su venta. Se valla el borde del campo y la separación de las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución:



La función que hay que minimizar será $L(x, y) = 6x + 4y$. Y sabemos que

$$S = 3x \cdot y = 11250 \Longrightarrow y = \frac{11250}{3x} = \frac{3750}{x} \Longrightarrow L(x) = 6x + \frac{15000}{x}$$

Para obtener los máximos y los mínimos utilizamos la primera derivada $L'(x) = 0$.

$$L'(x) = 6 - \frac{15000}{x^2} = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 15000 = 0 \Longrightarrow x = 50,\ y = L(50) = 75$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que

$$L''(x) = \frac{30000}{x^3} \Longrightarrow L''(50) = \frac{30000}{50^3} > 0$$

Luego $x = 50$ es un mínimo, y podemos concluir con que la parcela tiene que tener de dimensiones $3x = 150\, m$ e $y = 75\, m$ para utilizar la menor valla posible.