Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Febrero 2018

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dada la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x - 2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ \dfrac{x+3}{x^2+5} & \text{si} \quad -1 < x \le 7 \\ \dfrac{bx+1}{(x-5)^2} & \text{si} \quad x > 7 \end{cases}$$

Determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en $x = -1$ y $x = 7$.

Solución:

Continuidad en $x = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^-} (ax^2 + 5x - 2) = a - 7 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x+3}{x^2+5} = \frac{1}{3} \end{array} \right. \Longrightarrow a - 7 = \frac{1}{3} \Longrightarrow a = \frac{22}{3}$$

Continuidad en $x = 7$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 7^-} \frac{x+3}{x^2+5} = \frac{5}{27} \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 7^+} \frac{bx+1}{(x-5)^2} = \frac{7b+1}{4} \end{array} \right. \Longrightarrow \frac{5}{27} = \frac{7b+1}{4} \Longrightarrow b = -\frac{1}{27}$$

Problema 2 *(5 puntos)* Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, se pide:

a) Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 1$

b) Estudiar y representar gráficamente la función f. Calcular el área limitada por la curva y el eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

a) $F(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \dfrac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + C.$

$F(2) = 1 \Longrightarrow F(2) = \dfrac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2 + C = 1 \Longrightarrow C = 1$ luego la función es $F(x) = \dfrac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1.$

b) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow$ $(0,0)$, $(2,0)$ y $(1,0)$ con OX.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

Monotonía: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

	$(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

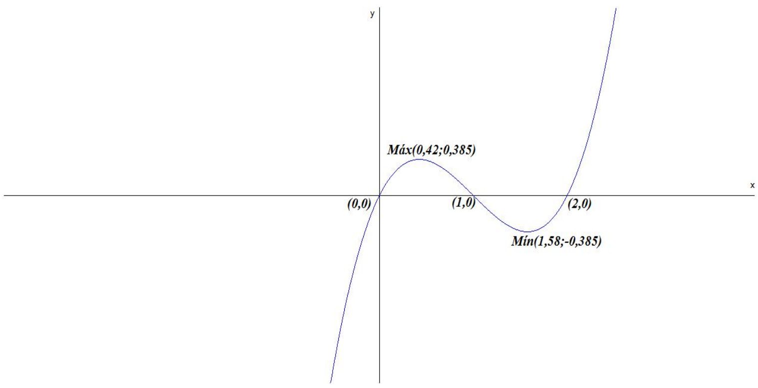
La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$.

La función es decreciente en el intervalo $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{3}\right)$.

La función tiene un máximo en $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right) = (0,42; 0,385)$ y un mínimo en $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{-2\sqrt{3}}{9}\right) = (1,58; -0,385)$.
Curvatura: $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Longrightarrow x = 1$

	$(-\infty, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\bigcap$	cóncava $\bigcup$

f convexa en $(-\infty, 1)$ y cóncava en $(1, \infty)$. Tiene un punto de inflexión en $(1, 0)$.



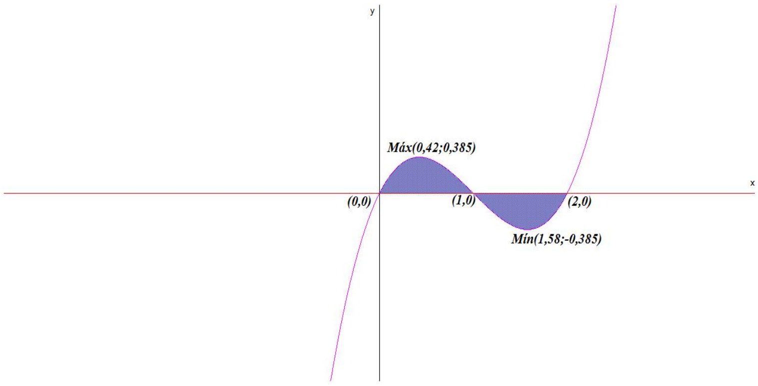
c)

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = F(2) - F(1) = -\frac{1}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ u^2$$



Problema 3 *(5 puntos)* Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

a) Obtener los puntos de corte con los ejes OX y OY.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

c) Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

d) Dibujar la región delimitada por la curva anterior y la recta $y = 4x$.

e) Calcular el área de la región anterior.

Solución:

a) Puntos de Corte

- Corte con el eje OX hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow$ $(0,0)$, $(-2,0)$ y $(1,0)$ con OX.
- Corte con el eje OY hacemos $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$

	$(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$.

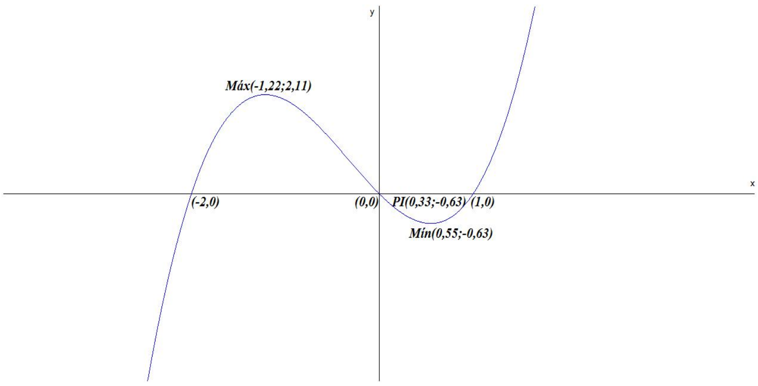
La función es decreciente en el intervalo $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)$.

La función tiene un máximo en $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{20+14\sqrt{7}}{27}\right) = (-1,22; 2,11)$ y un mínimo en $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3}, \frac{20-14\sqrt{7}}{27}\right) = (0,55; -0,63)$.

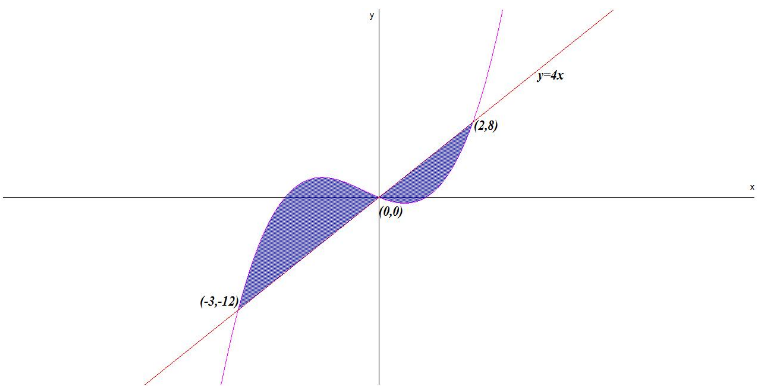
c) $f''(x) = 6x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\bigcap$	cóncava $\bigcup$

f convexa en $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ y cóncava en $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $\left(-\frac{1}{3}, \frac{20}{27}\right) = (0,33; 0,74)$.



d) $x^3 + x^2 - 2x = 4x \Longrightarrow x = -3,\ x = 0$ y $x = 2$.



e)

$$F(x)=\int(x^3+x^2-2x-4x)\,dx=\int(x^3+x^2-6x)\,dx=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-3x^2$$

$$S_1=\int_{-3}^{0}(x^3+x^2-6x)\,dx=F(0)-F(-3)=\frac{63}{4}$$

$$S_2=\int_{0}^{2}(x^3+x^2-6x)\,dx=F(2)-F(0)=-\frac{16}{3}$$

$$S=|S_1|+|S_2|=\frac{63}{4}+\frac{16}{3}=\frac{253}{12}\ u^2=21,083\ u^2$$

Problema 4 *(2,5 puntos)*

a) Calcule el valor del parámetro a que hace que el valor de la derivada de la función $y=ax^3+6x^2-ax-18$, en los puntos de abcisa $x=-2$ y $x=1$ sean iguales.

b) Sabiendo que $y=ax^3+6x^2-ax-18$ pasa por el punto $(2,12)$, calcúlese el valor de a y las coordenadas del punto de la curva donde se anula la segunda derivada.

Solución:

a) $f'(x)=3ax^2+12x-a$ y $f'(-2)=f'(1)\Longrightarrow 12a+24-a=3a+12-a\Longrightarrow a=4$

b) $f(6)=12\Longrightarrow 8a+24-2a-18=12\Longrightarrow a=1$ la función es $f(x)=x^3+6x^2-x-18\Longrightarrow f'(x)=3x^2+12x-1\Longrightarrow f''(x)=6x+12=0\Longrightarrow x=-2\Longrightarrow(-2,0)$