Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2017

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y - z = 8 \\ 2x + az = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Discútase en función de los valores del parámetro a.
2. (1 punto) Resuélvase para $a = 1$.

(Junio 2015 - Opción A)

Solución:

1.
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & a & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = -2a - 4 = 0 \Longrightarrow a = -2$$

   - Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
   - Si $a = -2$:
   $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right); \quad |A| = 0, \quad \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$
   $$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$
   Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución)

2. Si $a = 1$:
$$\left\{\begin{array}{c} 3x + y - z = 8 \\ 2x + z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Considérese la matriz

$$A = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

1. (1 punto) Calcúlese $(A \cdot A^T)^{200}$.

2. (1 punto) Calcúlese $(A \cdot A^T - 3I)^{-1}$.

Nota: A^T denota a la traspuesta de la matriz A. I es la matriz identidad de orden 3.
(Septiembre 2014 - Opción B)
Solución:

1.
$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A^T$$

Luego
$$(A \cdot A^T)^{200} = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.
$$A \cdot A^T - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot A^T - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(1 punto)* Hemos ido tres días seguidos al bar de la Universidad. El primer día tomamos 3 cafés, 2 refrescos de cola y 3 batidos de cacao, el precio fue de 7 euros. El segundo día tomamos 1 café, 2 refrescos de cola y 2 batidos de cacao, el precio total fue de 5 euros. Por último, el tercer día tomamos 2 cafés y un batido de cacao, el precio fue de 2 euros. Justifíquese razonadamente si con estos datos podemos determinar o no el precio de un café, de un refresco de cola y de un batido de cacao, suponiendo que estos precios no han variado en los tres días.
(Septiembre 2013 (coincidente)- Opción A)
Solución:
LLamamos x al precio de un café, y al de un refresco de cola y z al del batido.

$$\left\{\begin{array}{c} 3x+2y+3z=7 \\ x+2y+2z=5 \\ 2x+z=2 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right); \text{pero } F_3=F_1-F_2$$

Luego en sistema es compatible indeterminado y admite infinitas soluciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x=1-1/2\lambda \\ y=2-3/4\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$