Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Octubre 2017

Problema 1 Calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -8 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -8 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \ |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -8 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ |A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Problema 2 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 3 \\ m & 1 & m \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Calcular los valores de m para los que la matriz A es inversible.
2. Calcular A^{-1} para $m = 1$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ m & 1 & m \\ 4 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 2(2m^2 - m - 6) = 0 \Longrightarrow m = 2, \ \ m = -3/2$$

Si $m = 2$ o $m = -3/2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ no existe A^{-1}.

Si $m \neq 2$ y $m \neq -3/2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ existe A^{-1}.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -11/10 & 1/2 & 2/5 \\ 3/10 & 1/2 & -1/5 \\ 4/5 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Problema 3 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular A^n y en particular A^{1000}

Solución:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1000 & 1 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Solución:

LLamamos $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$AX = XA \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & a-b \\ 2c & c-d \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a+c = 2a \Longrightarrow c = 0 \\ 2b+d = a-b \Longrightarrow a = 3b+d \\ -c = 2c \Longrightarrow c = 0 \\ -d = c-d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

Luego $X = \begin{pmatrix} 3b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.