Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2018

Los problemas fueron propuestos en las pruebas de selectividad de la Comunidad de Madrid en el año 2016. De los seis problemas hay que resolver cinco de ellos, en el caso de que resuelvas los seis ten en cuenta que eliminaré, para la puntuación del examen, el que mejor puntuación tenga.

Problema 1 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right.$ se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1, 0, 1)$.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2, 1, 1)$.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 3, 1) \\ P_r(1, 0, 0) \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{PP_r} = (0, 0, -1)$

$$\pi : \left| \begin{array}{rrr} -1 & 0 & x - 1 \\ 3 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 3x + y - 3 = 0$$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1) \\ P_s = Q(2, 1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$

Problema 2 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto). Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P, S) = 2d(Q, S)$.

Solución:

a) El conjunto de puntos $R(x, y, z)$ que equidistan de P y Q es un plano mediador:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2} \Longrightarrow$$

$$2x + 4z - 9 = 0$$

b) La recta que pasa por P y Q es:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{QP} = (1,0,2) \\ P_r = Q(0,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r: \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right.$$

$$S(x,y,z) = (\lambda, 1, 1+2\lambda)$$

$$d(P,S) = 2d(Q,S) \Longrightarrow \sqrt{(\lambda-1)^2 + (-2+2\lambda)^2} = 2\sqrt{\lambda^2 + (2\lambda)^2} \Longrightarrow$$

$$\lambda = -1, \ \ \lambda = \frac{1}{3} \Longrightarrow S_1(-1,1,-1), \ \ S_2\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 3x + 4y - 5z - 7 = 0, \quad \pi_2 \equiv x - 2y + z - 3 = 0$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2.

b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $P(3,-1,2)$ al plano π_1.

c) (1 punto). Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

Solución:

a) El vector pedido es perpendicular a los vectores normales de los planos

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right| = (-6,-8,-10) \quad |\overrightarrow{u}| = 10\sqrt{2}$$

El vector $\overrightarrow{v} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es un vector paralelo a ambos planos.

b) $d(P,\pi_1) = \dfrac{|9-4-10-7|}{\sqrt{9+16+25}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}| \times |\overrightarrow{u_{\pi_2}}|} = \dfrac{(3,4,-5)\cdot(1,-2,1)}{\sqrt{50}\times\sqrt{6}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) (1 punto). Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \parallel \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2} \Longrightarrow a = -1$$

b)

$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}} = a + a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1/2$$

c) $\pi \equiv x - y = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 0)$

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a + 1, -(a + 1), a^2 - 1) =$$

$$(a + 1)(1, -1, a - 1) = \lambda(1, -1, 0) \Longrightarrow$$

$$a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Pero en este caso los planos son paralelos y, por tanto, este resultados no es válido y no se puede encontrar la recta r pedida para ningún valor de a.

Problema 5 *(2 puntos)* Dado el punto $P(2, 1, -1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0, 2, -1)$; $B(1, -3, 0)$ y $C(2, 1, 1)$.

Solución:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1, -5, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2, -1, 2) \\ A(0, 2, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ -5 & -1 & y - 2 \\ 1 & 2 & z + 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - z - 1 = 0$$

Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in r$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 0, -1) \\ P_t = P(2, 1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π:

$$(2 + \lambda) - (-1 - \lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow P'(1, 1, 0)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P''+P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$

$$(2,2,0) - (2,1,-1) = (0,1,1)$$

Problema 6 *(2 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,5,3)$, $B(0,6,4)$, $C(2,4,2)$ y $D(2,3,1)$ y se pide:

a) (1 punto). Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

b) (1 punto). Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) (1 punto). Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

Solución:

a)

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (0,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AD} = (2,-2,-2) \end{cases} \Longrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{son coplanarios}$$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2}$, luego se trata de un paralelogramo.

b)

$$S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}| = 2|(0,1,-1)| = 2\sqrt{2}\ u^2$$

c) Se trata de una recta r que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
Calculamos el centro de este paralelogramo:

$$Centro = \frac{A+C}{2} = \left(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Calculamos el vector normal al plano π que contiene al paralelogramo:

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = 2(0,1,-1)$$

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (0,1,-1) \\ P_r(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}) \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 9/2 + \lambda \\ z = 5/2 - \lambda \end{cases}$$