Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2018

Problema 1 *(3 puntos).* Sean el plano $\pi : x - 3y + 2z - 2 = 0$ y la recta $r : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$
se pide:

a) Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto $P(1, 2, -2)$.

b) Encontrar una recta t paralela a r que pase por P.

c) Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P

d) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π. En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.

e) Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r.

f) Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1, -3, 2), \quad r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, -1, -1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{array} \right.$$

a)

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, -3, 2) \\ P_s = P(1, 2, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{array} \right.$$

b)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} = (1, -1, -1) \\ P_t = P(1, 2, -2) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -2 - \lambda \end{array} \right.$$

c)

$$\pi' : x - 3y + 2z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 - 6 - 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 9$$

$$\pi' : x - 3y + 2z + 9 = 0 \Longrightarrow P \in \pi'$$

d)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow (2 + \lambda) - 3(1 - \lambda) + 2(-\lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

Luego la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

El ángulo que forman será $\beta = 90^{\text{o}} - \alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u_\pi} = (1, -3, 2)$ y $\overrightarrow{u_r} = (1, -1, -1)$:

$$\sin\beta = \frac{\overrightarrow{u_\pi} \cdot \overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_\pi}| \cdot |\overrightarrow{u_r}|} = \frac{2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} \Longrightarrow \beta = 17^{\text{o}}58'31''$$

e)

$$\pi'' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1, -3, 2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -1, -1) \\ P_r(2, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi'' : \left| \begin{array}{rrr} 1 & 1 & x-2 \\ -3 & -1 & y-1 \\ 2 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 5x+3y+2z-13 = 0$$

f)

$$h : \left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 2z - 2 = 0 \\ 5x + 3y + 2z - 13 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos).* Sea el punto $P(2, -1, 1)$. Se pide

a) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi : x - 3y + z + 1 = 0$.

b) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right.$

Solución:

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in t$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, -3, 1) \\ P_t = P(2, -1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π:

$$(2 + \lambda) - 3(-1 - 3\lambda) + (1 + \lambda) + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{7}{11}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 7/11 = 15/11 \\ y = -1 + 21/11 = 10/11 \\ z = 1 - 7/11 = 4/11 \end{array} \right. \Longrightarrow P'\left(\frac{15}{11}, \frac{10}{11}, \frac{4}{11}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':
$$\frac{P''+P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$
$$\left(\frac{30}{11}, \frac{20}{11}, \frac{8}{11}\right) - (2,-1,1) = \left(\frac{8}{11}, \frac{31}{11}, -\frac{3}{11}\right)$$

b) Segimos el siguiente procedimiento: $r: \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$

- Calculamos un plano $\pi \perp r/P \in \pi$:
$$-2x+3y-z+\lambda = 0 \Longrightarrow -4-3-1+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 8$$
$$\pi : -2x+3y-z+8 = 0 \Longrightarrow \pi : 2x-3y+z-8 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π:
$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-2,3,-1) \\ P_r(1,1,1) \end{cases} \Longrightarrow r: \begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}$$
$$2(1-2\lambda) - 3(1+3\lambda) + (1-\lambda) - 8 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{4}{7}$$
$$\begin{cases} x = 1+8/7 = 15/7 \\ y = 1-12/7 = -5/7 \\ z = 1+4/7 = 11/7 \end{cases} \Longrightarrow P'\left(\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{11}{7}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':
$$\frac{P''+P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$
$$\left(\frac{30}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{22}{7}\right) - (2,-1,1) = \left(\frac{16}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{15}{7}\right)$$