Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2017

Problema 1 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (2, m, 1)$, $\overrightarrow{v} = (m, 3, 2)$ y $\overrightarrow{w} = (m, -1, 3)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ m & 3 & 2 \\ m & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(m^2 + 4m - 22) = 0 \Longrightarrow m = -2 \pm \sqrt{26}$$

Si $m = -2 \pm \sqrt{26}$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

1. Calcular m para que los vectores $\overrightarrow{u} = (2m, 5, 7)$ y $\overrightarrow{v} = (m, m, -1)$ sean perpendiculares.
2. Encontrar un vector perpendicular $\overrightarrow{u} = (1, 2, -3)$ y a $\overrightarrow{v} = (1, 2, 0)$ que tenga módulo 7.
3. Decidir si los vectores $\overrightarrow{u} = (5, -1, 1)$ y $\overrightarrow{v} = (1, 3, -2)$ son perpendiculares.

Solución:

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 2m^2 + 5m - 7 = 0 \Longrightarrow m = 1$ y $m = -7/2$
2. $$\overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (6, -3, 0) \Longrightarrow |\overrightarrow{w}| = 3\sqrt{5}$$
   $$\overrightarrow{t} = \frac{7}{3\sqrt{5}}(6, -3, 0) = \left(\frac{14\sqrt{5}}{5}, \frac{-7\sqrt{5}}{5}, 0 \right)$$
3. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 5 - 3 - 2 = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u} = (1, -1, 4)$, $\overrightarrow{v} = (2, 1, 0)$ y $\overrightarrow{w} = (0, 2, -1)$. Calcular:

1. Volumen de paralelepípedo que determinan.
2. Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

3. Altura del paralelepípedo.

4. Volumen del tetraedro que determinan.

5. Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

6. Altura del tetraedro.

Solución:

1.
$$V_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 13\ u^3$$

2.
$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |(-4, 8, 3)| = \sqrt{89}\ u^2$$
$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = \sqrt{\frac{89}{5}}\ u$$

3.
$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{13\sqrt{89}}{89}\ u$$

4.
$$V_t = \frac{13}{6}\ u^3$$

5.
$$S_t = \frac{\sqrt{89}}{2}\ u' \ \ h_t = h_p = \sqrt{\frac{89}{5}}\ u$$

6.
$$H_t = H_p = \frac{13\sqrt{89}}{89}\ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(-1, 2, 4)$, $B(4, -1, 3)$ y $C(7, 6, 4)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

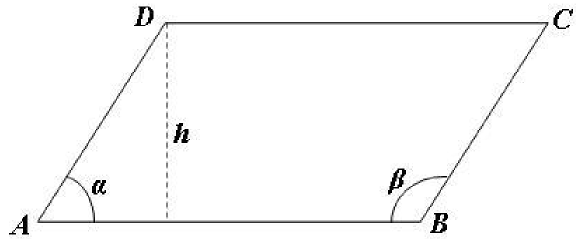
1. Encontrar el 4º vértice D.

2. Calcular la longitud de sus lados.

3. Calcular sus ángulos y su centro.

4. Calcular el punto simétrico de A respecto de C.

5. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.



Solución

1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1, 2, 4) + (3, 7, 1) = (2, 9, 5)$.
2. $|\overrightarrow{AB}| = |(5, -3, -1)| = \sqrt{35}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(3, 7, 1)| = \sqrt{59}$
3. $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|} = \frac{-7}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{59}} \Longrightarrow \alpha = 98^{o}51'40'' \text{ y } \beta = 81^{o}08'20''$$

   El centro es $M\,(3, 4, 4)$
4. $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (15, 10, 4)$
5. $$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$$
   $$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-1, 2, 4) + \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 0\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 4\right)$$
   $$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 4\right) + \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 0\right) = \left(\frac{13}{3}, \frac{14}{3}, 4\right)$$
   $$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{13}{3}, \frac{14}{3}, 4\right) + \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 0\right) = (7, 6, 4)$$