Examen de Matemáticas II (Marzo 2018)
Simulacro de Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & y+ & kz = & k \\ x+ & ky+ & z = & k^2 \\ kx+ & y+ & z = & 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro k.

b) (0,5 puntos). Resolverlo para $k = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & k \\ 1 & k & 1 & k^2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \ k = -2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego el sistema sería compatible determinado.
- Si $k = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right); \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

  En este caso tenemos $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por tanto, Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.
- Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  Claramente Rango$(A) =$Rango$(\overline{A}) = 1 <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y se trata de un sistem compatible indeterminado.

b) Si $k = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y & & = 0 \\ x+ & & z = & 0 \\ & y+ & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{-1}, \quad s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4}$$

se pide:

a) (2 puntos). Determinar la ecuación de la recta perpendicular común a r y s

b) (0,5 puntos). Calcular la mínima distancia entre las rectas r y s.

Solución:

a)

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, -1) \\ P_r(0, 1, -4) \end{array}\right. \qquad s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 4) \\ P_s(0, 0, 0) \end{array}\right.$$

Calculamos el vector perpendicular a estas dos rectas:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left|\begin{array}{ccr} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right| = (13, -9, -1)$$

Calculamos la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, -1) \\ \overrightarrow{u_t} = (13, -9, -1) \\ P_r(0, 1, -4) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{rrr} 2 & 13 & x \\ 3 & -9 & y-1 \\ -1 & -1 & z+4 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow 12x+11y+57z+217 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 1, 4) \\ \overrightarrow{u_t} = (13, -9, -1) \\ P_s(0, 0, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{rrr} 1 & 13 & x \\ 1 & -9 & y \\ 4 & -1 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow 35x+53y-22z = 0$$

$$t : \left\{\begin{array}{l} 12x + 11y + 57z + 217 = 0 \\ 35x + 53y - 22z = 0 \end{array}\right.$$

b) $\overrightarrow{P_sP_r} = (0, 1, -4)$

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]| = |\left|\begin{array}{ccr} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right|| = -5 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}| = |(13,-9,-1)| = \sqrt{251}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s},\overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|} = \frac{5}{\sqrt{251}} = \frac{5\sqrt{251}}{251}\ u$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ x + k & \text{si} \quad x \le 0 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x, se pide:

a) (1 punto). Determinar el valor de k para que la función sea continua en $\mathbf{R}$.

b) (0,5 punto). Hallar los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

c) (1 punto). Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abcisa $x = 1$.

Solución:

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ se tiene que cumplir:

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = f(x)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} (x+k) = k$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{2^x}{\sqrt{x}}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2^x \ln 2\sqrt{x} - 2^x \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{2^x\cdot x\cdot \ln 2 - 2^{x-1}} = \frac{0}{-1/2} = 0$$

Luego $k = 0$

b) Si $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0,0)$. Si $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{x}\ln x}{2^x} = 0 \Longrightarrow x = 0,\ \ x = 1 \Longrightarrow (0,0)$ y $(1,0)$, por la otra rama obtenemos el punto $(0,0)$.

c) Se pide la tangente en la rama $x > 1$:

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)2^x - \sqrt{x}\ln x\cdot 2^x\ln 2}{2^{2x}}$$

$$m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

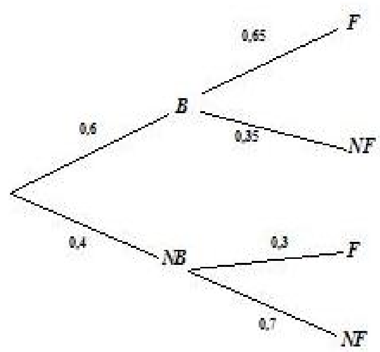
La recta tangente es $y = \dfrac{1}{2}(x-1)$

Problema 4 *(2,5 puntos)* En un centro de danza el 60 % de los alumnos recibe clases de ballet. Por otro lado, entre quienes reciben clases de ballet, el 65 % también recibe clase de flamenco. Además sólo el 30 % de quienes no reciben clases de ballet recibe clases de flamenco. Calcúlese la probabilidad de que un alumno de dicho centro elegido al azar:

a) (1,25 puntos). Reciba clases de flamenco.

b) (1,25 puntos). Reciba clases de ballet si no recibe clases de flamenco.

Solución: B: reciben clases de ballet y F: reciben clases de flamenco.



a) $P(F) = P(F|B)P(B)+P(F|NB)P(NB) = 0,65\cdot 0,6+0,3\cdot 0,4 = 0,51$

b) $P(B|NF) = \dfrac{P(NF|B)P(B)}{P(NF)} = \dfrac{0,35 \cdot 0,6}{1-0,51} = 0,429$

Examen de Matemáticas II (Abril 2018)
Simulacro de Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) (1 punto). Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.

c) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.

Solución:

a)

$$A^2 = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1$$

b) $AXA^{-1} = B \Longrightarrow X = A^{-1}BA$:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$|(2B)^{-1}| = \frac{1}{|2B|} = \frac{1}{8|B|} = \frac{1}{32}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x - y + 2z + 3 = 0$, el punto $A(1, 1, 3)$ y la recta $r \equiv x = y - 2 = \dfrac{z}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia del punto A a la recta r.

b) (1,5 puntos). Hallar la proyección del punto A sobre el plano π.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)\\ P_r(0,2,0)\end{array}\right. ,\quad A(1,1,3),\quad \overrightarrow{P_rA}=(1,-1,3)$$

a)

$$d(A,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}\,u$$

$$|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}|=|\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{array}\right|=|(-5,1,2)|=\sqrt{30}$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos la recta $t\perp\pi/A\in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,-1,2)\\ P_t=A(1,1,3)\end{array}\right.\Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=3+2\lambda\end{array}\right.$$

- Calculamos A' proyección de A como punto de corte de t y π:

$$(1+\lambda)-(1-\lambda)+2(3+2\lambda)+3=0\Longrightarrow\lambda=-\frac{3}{2}$$

$$A'\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2},0\right)$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se pide:

a) (1 punto). Calcular el perímetro mínimo que tiene que tener un rectángulo con un área de 50 m^2.

b) (1,5 puntos). Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:

a)

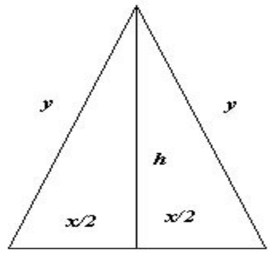
$$S=xy=50\Longrightarrow y=\frac{50}{x}$$

$$P(x,y)=2x+2y\Longrightarrow P(x)=2x+\frac{100}{x}=\frac{2x^2+100}{x}$$

$$P'(x)=\frac{2(x^2-50)}{x^2}=0\Longrightarrow x=5\sqrt{2}$$

$$P''(x)=\frac{200}{x^3}\Longrightarrow P''(5\sqrt{2})=\frac{200}{(5\sqrt{2})^3}>0\ \text{Mínimo}$$

Luego las dimensiones son $x=5\sqrt{2}\ m^2$ e $y=\frac{50}{5\sqrt{2}}=5\sqrt{2}\ m^2$



b)

$$S = \frac{x \cdot h}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4-x}$$

$$S'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88+21x}{16(4-x)\sqrt{4-x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \frac{8}{3} \Longrightarrow y = \frac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Problema 4 *(2,5 puntos)* Sabiendo que el peso de las palomas torcaces que pasan emigrando por la Península se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, de media 491 gramos y desviación típica 37 gramos. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que pese emtre 450 y 500 gramos, si se elige una de ellas aleatoriamente.

b) (0,5 puntos) Estimar cuántas de las 1500 palomas, que han pasado hoy por la Peninsula pesan más de 551 gramos.

c) (1 punto) Observamos una bandada de ellas que por su tamaño sabemos que superan los 450 gramos, ¿cúal será la probabilidad de pesen menos 543 gramos?

Solución:

$N(491, 37)$

a) $P(450 \leq X \leq 500) = P\left(\dfrac{450-491}{37} \leq Z \leq \dfrac{500-491}{37}\right) = P(-1,11 \leq Z \leq 0,24) = P(Z \leq 0,24) - P(Z \leq -1,11) = P(Z \leq 0,24) - (1 - P(Z \leq 1,11) = 0,5948 - (1 - 0,8665) = 0,4613$

b) $P(X \geq 551) = 1 - P(X \leq 551) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{551-491}{37}\right) = 1 - P(Z \leq 1,62) = 1 - 0,9474 = 0,0526 \Longrightarrow 1500 \cdot 0,0526 = 78,9 \Longrightarrow 79$ palomas.

c) $P(X \geq 543 | X \geq 450) = \dfrac{P(\{X \geq 543\} \cap \{X \geq 450\})}{P(X \geq 450)} = \dfrac{P(X \geq 543)}{P(X \geq 450)} = \dfrac{1 - P(X \leq 543)}{1 - P(X \leq 450)} = \dfrac{1 - P\left(Z \leq \frac{543-491}{37}\right)}{1 - P\left(Z \leq \frac{450-491}{37}\right)} = \dfrac{1 - P(Z \leq 1,41)}{1 - P(Z \leq -1,11)} = \dfrac{1 - 0,9207}{1 - (1 - P(Z \leq 1,11))} = \dfrac{0,0793}{P(Z \leq 1,11)} = \dfrac{0,0793}{0,8665} = 0,0915$