Examen de Matemáticas II (Junio 2018)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$A = \left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & my & & = 1 \\ -2x- & (m+1)y+ & z = & -1 \\ x+ & (2m-1)y+ & (m+2)z = & 2+2m \end{array} \right. ,$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{array} \right) \quad |A| = m^2 - 1 = 0 \Longrightarrow m = \pm 1$$

Si $m \neq \pm 1 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = n$^{\text{o}}$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

Si $m = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 + 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m = 0$:

$$\begin{cases} x = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 2 *(2,5 puntos)*

a) (1,5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0,92$; $m_2 = 0,94$; $m_3 = 0,89$; $m_4 = 0,90$; $m_5 = 0,91$. Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\displaystyle\int_1^2 x^2 \ln(x)dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.

Solución:

a) $E'(x) = 2[5x-(m_1+m_2+m_3+m_4+m_5)] = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{5} = \dfrac{4,56}{5} = 0,912$, es decir, se trata de la media de resultados. Sólo queda por comprobar que se trata de un mínimo:
$E''(x) = 10 \Longrightarrow E''(0,912) = 10 > 0 \Longrightarrow x = 0,912$ es un mínimo.
Éste valor correspondería a un error de $E(0,912) = 0,00148$.

b)

$$F(x) = \int x^2 \ln(x)\, dx = \left[\begin{array}{c} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2dx \Longrightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] =$$

$$\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3(3\ln x - 1)}{9}$$

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)\, dx = F(2) - F(1) = \frac{24\ln 2 - 7}{9} \simeq 1,07\ u^2$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$;, $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$ se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) (1,5 punto) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$, con $A(2;1;3)$ y $B(1;2;3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

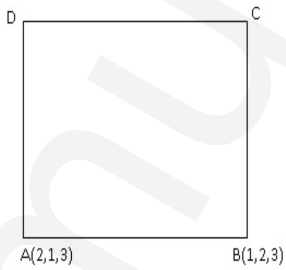
Solución:

a) La única posibilidad de que el cubo tenga una cara en cada plano es que éstos sean paralelos. En el caso de que no lo fueran, es decir, si se cortan cabría la posibilidad de que fuesen perpendiculares, pero en este caso habría infinitas soluciones. Veamos que son paralelos: $\dfrac{4}{-2} = \dfrac{6}{-3} = \dfrac{-12}{6} \neq \dfrac{1}{-5} \Longrightarrow$ paralelos. La longitud del lado del cubo buscado será $l = d(\pi_2, \pi_1)$, para calcular esta distancia tomamos un punto cualquiera A de $\pi_2 : -2x-3y+6z-5 = 0 \Longrightarrow A(0,0,5/6)$ y tendremos:

$$l = d(\pi_2, \pi_1) = d(A, \pi_1) = \frac{|0+0-12\cdot 5/6+1|}{\sqrt{16+36+144}} = \frac{|-9|}{\sqrt{196}} = \frac{9}{14}$$

$$V = l^3 = \left(\frac{9}{14}\right)^3 = \frac{729}{2744} = 0,266\ u^2$$

b) El cuadrado es:



$$C \in r = \pi_2 \cap \pi_3 \Longrightarrow r : \begin{cases} -2x-3y+6z = 5 \\ x-y+z = 2 \end{cases} \Longrightarrow r : \begin{cases} x = \dfrac{1+3\lambda}{5} \\ y = \dfrac{-9+8\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Luego $C\left(\dfrac{1+3\lambda}{5}, \dfrac{-9+8\lambda}{5}, \lambda\right)$. Por ser un cuadrado $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

El vector $\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$ y el $\overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{1+3\lambda}{5}, \dfrac{-9+8\lambda}{5}, \lambda\right) - (1,2,3) = \left(\dfrac{-4+3\lambda}{5}, \dfrac{-19+8\lambda}{5}, \lambda-3\right)$. Luego $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{4-3\lambda}{5} + \dfrac{-19+8\lambda}{5} = 0 \Longrightarrow \lambda = 3 \Longrightarrow C(2,3,3)$.

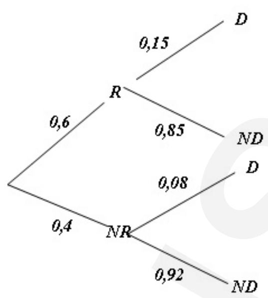
$D = A + \overrightarrow{AD} = A + \overrightarrow{BC} = (2,1,3) + (1,1,0) = (3,2,3)$ (El vector $\overrightarrow{BC} = (1,1,0)$)

Problema 4 *(2,5 puntos)* El 60 % de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15 % de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8 % si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Solución:



a) $P(D) = P(D|R)P(R) + P(D|NR)P(NR) = 0,15 \cdot 0,6 + 0,08 \cdot 0,4 = 0,122 \Longrightarrow 12,20\,\%$

b) $P(R|D) = \dfrac{P(D|R)P(R)}{P(D)} = \dfrac{0,15 \cdot 0,6}{0,122} = 0,7377 \Longrightarrow 73,77\,\%$

Examen de Matemáticas II (Junio 2018)
Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.

b) (1 punto) Para $m = 0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.

c) (0,5 puntos) Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

Solución:

a) $|A| = -(m^2 + 4m + 4) = 0 \Longrightarrow m = -2$:

- Si $m = -2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$
- Si $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$

b) Si $m = 0$ tenemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (-2, 0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y

$B^t \cdot B = (-2, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (4)$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) (0,75 puntos) Calcular $f'(4)$.

c) (1,25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si} \quad x < 0 \\[2ex] \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = 1 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = 1 \end{cases} \Longrightarrow$
$y = 1$.

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-9}{\sqrt{(x^2+9)^3}} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{9}{\sqrt{(x^2+9)^3}} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow f'(4) = \dfrac{9}{125} = 0,072.$

c) La función corta al eje OX en $x = 0$ por lo que tendremos dos recintos de integración uno para cada una de las ramas: $S_1 : [-1, 0]$ y $S_2 : [0, 1]$.

$$F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = \left[\begin{array}{c} x^2+9 = t \\ 2xdx = dt \end{array} \right] = \int t^{-1/2}\, dt = t^{1/2} = \sqrt{x^2+9}$$

$$S_1 = \int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = -\sqrt{x^2+9}\Big]_{-1}^{0} = \sqrt{10} - 3 \simeq 0,162$$

$$S_2 = \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\, dx = \sqrt{x^2+9}\Big]_{0}^{1} = \sqrt{10} - 3 \simeq 0,162$$

$$S = |S_1| + |S_2| = 2\sqrt{10} - 6 \simeq 0,325$$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

c) (0,5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pasa por el punto P.

Solución:

$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, -5) \\ P_r(0, 2, 6) \end{cases}$ y $s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (-3, 3, 1) \\ P_s(2, -1, 1) \end{cases}$

a) $\overrightarrow{PP_r} = (-1, 1, 5)$ y $|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}| = |(5, 0, 1)| = \sqrt{26}$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}} \simeq 0,931\ u$$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (2, -3, -5)$ y $[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$

r y s se cruzan.

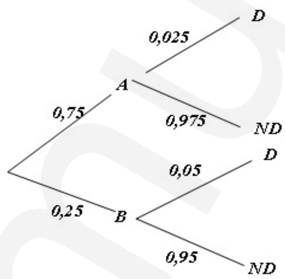
c) $\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{u_s} = (-3, 3, 1) \Longrightarrow \pi : -3x + 3y + z + \lambda = 0$ como $P \in \pi \Longrightarrow -3 + 3 + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$, luego $\pi : -3x + 3y + z - 1 = 0 \Longrightarrow \pi : 3x - 3y - z + 1 = 0$

Problema 4 *(2,5 puntos)* En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75 % de los productos fabricados son de tipo A y el 25 % de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5 % de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2,5 % de las veces.

a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) (1,5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

Solución:



a) $P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) = 0,025 \cdot 0,75 + 0,05 \cdot 0,25 = 0,03125$. Luego se esperan $5000 \cdot 0,03125 = 156,25$ tornillos defectuosos, redondeando por exceso 157.

b) $p = 0,025$, $q = 1 - p = 0,975$ y $n = 6000$. Se trata de una binomial $B(6000; 0,025)$ como $np = 6000 \cdot 0,025 = 150 > 5$ y $nq = 6000 \cdot 0,975 = 5850 > 5$ la binomial se comporta como una normal $N(np, \sqrt{npq}) = N(150; 12,09)$
Aplicando la corrección por continuidad de Yates $P(X > 160) = P(X \geq 160,5) = P\left(Z \geq \frac{160,5-150}{12,09}\right) = P(Z \geq 0,87) = 1 - P(Z \leq 0,87) = 1 - 0,8078 = 0,1922$