Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2018)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,25 puntos) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro α.

b) (0,75 puntos) Para $\alpha = 0$, calcular, si es posible, A^{-1}.

c) (0,5 puntos) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso $\alpha = 1$.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5\alpha \end{pmatrix} \quad |A| = 490(\alpha - 1) = 0 \Longrightarrow \alpha = 1$$

Si $\alpha \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $\alpha = 1 \Longrightarrow |A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 98 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

b) Si $\alpha = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/49 & -4/49 & 1/7 \\ -3/98 & 3/49 & 1/7 \\ 3/70 & 4/35 & -1/5 \end{pmatrix}$$

c) Si $\alpha = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 14F_3 - 3F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 0 & 56 & 40 & 148 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 8F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 37/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema compatible indeterminado}$$

$$\left\{\begin{array}{l}14x+10z=2\\ 7y+5z=37/2\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c}x=1/7-(5/7)\lambda\\ y=37/14-(5/7)\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll}8e^{2x-4} & \text{si} & x\le 2\\ \frac{x^3-4x}{x-2} & \text{si} & x>2\end{array}\right.$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de f en $x=2$.

b) (1 punto) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?

c) (0,75 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^-}(8e^{2x-4})=8$

$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{x^3-4x}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{3x^2-4}{1}=8$

$f(2)=8\Longrightarrow f$ es continua en $x=2$.

b) Si $x\le 2$ la función no tiene asíntotas verticales, tendría una horizontal en $y=0$: $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -\infty}(8e^{2x-4})=0$ y, por tanto, en esa rama no habría oblicuas.

Si $x>2$ la función no tiene asíntotas verticales, la única posible sería en $x=2$ pero no está en la rama. Horizontales tampoco habría $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3-4x}{x-2}=\infty$ y tampoco habría oblicuas en esa rama $\displaystyle m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^3-4x}{x^2-2x}=\infty$

c) $\displaystyle\int_0^2 8e^{2x-4}\,dx=4e^{2x-4}\Big]_0^2=4-\frac{4}{e^4}\simeq 3,927$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Se consideran los vectores $\overrightarrow{u}=(-1,2,3)$, $\overrightarrow{v}=(2,0,-1)$ y el punto $A(-4,4,7)$. Se pide:

a) (1 punto) Determinar un vector $\overrightarrow{w_1}$ que sea ortogonal a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.

b) (0,75 puntos) Hallar un vector no nulo $\overrightarrow{w_2}$ que sea combinación lineal de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y ortogonal a $\overrightarrow{v}$.

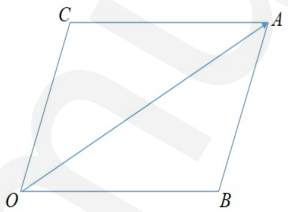
c) (0,75 puntos) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overrightarrow{OA}$.

Solución:

a) $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}| = |(-2, 5, -4)| = \sqrt{45} \Longrightarrow \overrightarrow{w_1} = \left(\frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{-4}{3\sqrt{5}}\right)$

b) $\overrightarrow{w_2} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = a(-1, 2, 3) + b(2, 0, -1) = (-a + 2b, 2a, 3a - b)$ y $\overrightarrow{w_2} \perp \overrightarrow{v} \Longrightarrow \overrightarrow{w_2} \cdot \overrightarrow{v} = (-a + 2b, 2a, 3a - b) \cdot (2, 0, -1) = -2a + 4b + 0 - 3a + b = 0 \Longrightarrow -5a + 5b = 0 \Longrightarrow a = b$ Por ejemplo si $a = b = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{w_2} = (1, 2, 2)$

c) $\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} = a(-1, 2, 3) + b(2, 0, -1) = (-a + 2b, 2a, 3a - b) = (-4, 4, 7) \Longrightarrow a = 2$ y $b = -1$.
$\overrightarrow{OB} = 2(-1, 2, 3) \Longrightarrow B(-2, 4, 6)$ y $\overrightarrow{BA} = -(2, 0, -1) = (-2, 0, 1) = \overrightarrow{OC} \Longrightarrow C(-2, 0, 1)$
Es decir, $O(0, 0, 0)$, $B(-2, 4, 6)$, $A(-4, 4, 7)$ y $C(-2, 0, 1)$.



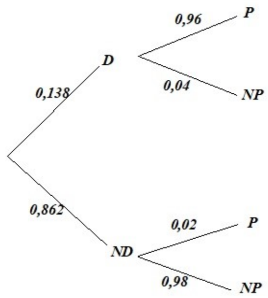
Problema 4 *(2,5 puntos)* Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8 % de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43 % de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?

b) (1,5 puntos) Cierto test diagnostica correctamente el 96 % de los casos positivos de diabetes, pero da un 2 % de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

Solución:
$P(D) = 0,138$ y $P(\overline{S}) = 0,43$

a) $P(D \cap S) = 0,138 \cdot (1 - 0,43) = 0,07866$
$P(\overline{D} \cup \overline{S}) = P(\overline{D \cap S}) = 1 - P(D \cap S) = 1 - 0,07866 = 0,92134$



b)

$$P(D|P) = \frac{P(P|D)P(D)}{P(P)} = \frac{0,96 \cdot 0,138}{P(P|D)P(D) + P(P|ND)P(ND)} =$$

$$\frac{0,13248}{0,13248 + 0,02 \cdot 0,862} = 0,88485$$

Examen de Matemáticas II (Extraordinaria 2018) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

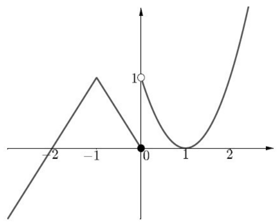
Solución:

x días en Francia, y días en Alemanía y z días en Suiza.

$$\left\{\begin{array}{l}(20+20+8)x+(25+15+8)y+(30+25+8)z=765\\ x+y+z=15\\ x=2z\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}48x+48y+63z=765\\ x+y+z=15\\ x-2z=0\end{array}\right. \quad x=6,\ \ y=6,\ \ z=3$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $y=f(x)$. Usando la información de la figura, se pide:



a) (0,5 puntos) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.

b) (1 punto) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

c) (0,5 puntos) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

d) (0,5 puntos) Determinar el valor de $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$

Solución:

a) $f(-1) = 1$ y $f'(1) = 0$.

b) En $x = -1$:
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = 1$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = 1$ y $f(-1) = 1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = -1$.
En $x = 0$:
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 0$, $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 1 \Longrightarrow f$ discontinua no evitable en $x = 0$, presenta un salto.

c) En $x = 0$ la función no es continua y, por tanto, no es derivable. En $x = -1$ la función es continua pero hace un pico en el que se podrían trazar infinitas rectas tangentes, luego no es derivable en $x = -1$.

d) $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \frac{2\cdot 1}{2} = 1\ u^2$.

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados el punto $P(0,-1,1)$ y la recta r, que pasa por el punto $Q(1,0,1)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (0,1,2)$, se pide:

a) (0,5 puntos) Hallar la ecuación implícita del plano que contiene a r y pasa por P.

b) (0,5 puntos) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a la recta r.

c) (1,5 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1, T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.

Solución:

$$r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{v}=(0,1,2) \\ P_r=Q(1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow r:\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \text{ y } P(0,-1,1)$$

a)

$$\pi:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(0,1,2) \\ \overrightarrow{P_rP}=(0,-1,1)-(1,0,1)=(-1,-1,0) \\ P_r(1,0,1) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\pi:\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=2x-2y+z-3=0$$

b) $S\in r \Longrightarrow S(1,\lambda,1+2\lambda)$ luego $\overrightarrow{SP}=(0,-1,1)-(1,\lambda,1+2\lambda)=(-1,-1-\lambda,-2\lambda)$ y como $\overrightarrow{SP}\perp\overrightarrow{u_r}\Longrightarrow\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{u_r}=0\Longrightarrow(-1,-1-\lambda,-2\lambda)\cdot(0,1,2)=-1-\lambda-4\lambda=0\Longrightarrow -1-5\lambda=0\Longrightarrow\lambda=-\dfrac{1}{5}\Longrightarrow$ $S\left(1,-\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5}\right)$

c) Sea $T\in r$: $T(1,\lambda,1+2\lambda)\Longrightarrow\overrightarrow{PT}=(1,\lambda,1+2\lambda)-(0,-1,1)=(1,\lambda+1,2\lambda)$ y $|\overrightarrow{PT}|=\sqrt{1+(\lambda+1)^2+4\lambda^2}=\sqrt{5}\Longrightarrow\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=\dfrac{3}{5}\Longrightarrow$

$$T_1(1,-1,-1)\;\;T_2\left(1,\frac{3}{5},\frac{11}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{PT_1}=(1,-1,-1)-(0,-1,1)=(1,0,-2)\quad\overrightarrow{PT_2}=\left(1,\frac{3}{5},\frac{11}{5}\right)-(0,-1,1)=\left(1,\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PT_1}\times\overrightarrow{PT_2}|=|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 8/5 & 6/5 \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{16}{5},\frac{-16}{5},\frac{8}{5}\right)\right|=$$

$$\frac{1}{2}\cdot 8\left|\left(\frac{2}{5},\frac{-2}{5},\frac{1}{5}\right)\right|=\frac{12}{5}=2,4\ u^2$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu=8,5$ y desviación típica $\sigma=2,5$. Se pide:

a) (1,25 puntos) Calcular el valor a tal que $P(X\le a)=0,05$.

b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.

Solución:

$N(8,5;2,5)$

a) La tabla de la normal empieza con 0,5: $P(X \leq a) = 0,05 \Longrightarrow 1 - P\left(Z \leq \dfrac{a-8,5}{2,5}\right) = 1 - 0,05 \Longrightarrow P\left(Z \leq -\dfrac{a-8,5}{2,5}\right) = 0,95 \Longrightarrow -\dfrac{a-8,5}{2,5} = 1,645 \Longrightarrow a = 4,3875$

b) $P(8 \leq X \leq 9,3) = P\left(\dfrac{8-8,5}{2,5} \leq Z \leq \dfrac{9,3-8,5}{2,5}\right) = P(-0,2 \leq Z \leq 0,32) = P(Z \leq 0,32) - P(Z \leq -0,2) = P(Z \leq 0,32) - (1 - P(Z \leq 0,2)) = 0,6255 - (1 - 0,5793) = 0,2048$