Examen de Matemáticas 2^{o}Bachillerato(CN)

Abril 2018

Problema 1 *(2.5 puntos)* De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que $P(A) = 0{,}3$ y que $P(\overline{B}) = 0{,}25$. Calcule las siguientes probabilidades:

a) (0.75 puntos) $P(A \cup B)$.

b) (0.75 puntos) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

c) (1 punto) $P(A|\overline{B})$.

Solución:

a) A y B independientes $\Longrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}75 = 0{,}225$.
$(P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}2 + 0{,}75 - 0{,}225 = 0{,}825$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}825 = 0{,}175$

c) $P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\overline{B})} = \dfrac{0{,}3 - 0{,}225}{0{,}25} = 0{,}3$

Problema 2 *(2.5 puntos)* El 55 % de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30 % usa vehículo propio y el resto va andando. El 65 % de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70 % de los que usan vehículo propio son hombres y el 52 % de los que van andando son mujeres.

a) (1.5 puntos) Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.

b) (1 punto) Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando?

Solución:

a)
$$P(H) = 0{,}55 \cdot 0{,}35 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}15 \cdot 0{,}48 = 0{,}4745$$

b)
$$P(A|H) = \frac{P(H|A)P(A)}{P(H)} = \frac{0{,}48 \cdot 0{,}15}{0{,}4745} = 0{,}1517$$

Problema 3 *(2.5 puntos)* A un certamen de exalumnos del Colegio Villaeuropa de Móstoles acuden 521 antigüos alumnos. Después de preguntarles sobre su vida laboral, académica y emocional, se ha llegado a la conclusión de que el 80 % de ellos están satisfechos con sus logros personales. ($p = 0,8$) Se pide:

a) (0.25 puntos) ¿Qué distribución estadística representaría estos datos? ¿A qué distribución acudiríamos para obtener probabilidades?

b) (0.25 puntos) Calcular la probabilidad de que estén satisfechos menos de 430.

c) (0.25 puntos) Calcular la probabilidad de que estén satisfechos más de 435.

d) (0.25 puntos) Calcular la probabilidad de que estén satisfechos entre 420 y 438.

e) (0.25 puntos) Calcular la probabilidad de que estén satisfechos entre 400 y 433.

f) (0.25 puntos) Calcular la probabilidad de que estén satisfechos entre 385 y 400.

g) (0.25 puntos) Calcular la probabilidad de que estén satisfechos más de 397.

h) (0.25 puntos) Si posteriormente acuden 123 compañeros más, ¿cuántos esperamos que estén satisfechos en el total de exalumnos?

i) (0.50 puntos) Si sabemos que más de 400 están satisfechos, calcular la probabilidad de que lo estén menos de 437.

Solución:

a) Se trata de una binomial $B(521; 0{,}8)$, como $np = 521 \cdot 0{,}8 = 416 > 5$ y $nq = 521 \cdot 0{,}2 = 104{,}2 > 5$, se puede aproximar por una distribución normal $N(np; \sqrt{npq}) = N(416{,}8; 9{,}13)$

b) $P(X < 429{,}5) = P\left(Z < \dfrac{429{,}5 - 416{,}8}{9{,}13}\right) = P(Z < 1{,}39) = 0{,}9177$

c) $P(X > 435{,}5) = P\left(Z > \dfrac{435{,}5 - 416{,}8}{9{,}13}\right) = P(Z > 2{,}05) = 1 - P(Z < 2{,}05) = 1 - 0{,}9798 = 0{,}0202$

d) $P(420{,}5 < X < 437{,}5) = P\left(\dfrac{420{,}5 - 416{,}8}{9{,}13} < Z < \dfrac{437{,}5 - 416{,}8}{9{,}13}\right) = P(0{,}41 < Z < 2{,}27) = P(Z < 2{,}27) - P(Z < 0{,}41) = 0{,}9884 - 0{,}6591 = 0{,}3293$

e) $P(400{,}5 < X < 432{,}5) = P\left(\dfrac{400{,}5 - 416{,}8}{9{,}13} < Z < \dfrac{432{,}5 - 416{,}8}{9{,}13}\right) = P(-1{,}79 < Z < 1{,}72) = P(Z < 1{,}72) - P(Z < -1{,}79) = P(Z < 1{,}72) - (1 - P(Z < 1{,}79)) = P(Z < 1{,}72) + P(Z < 1{,}79) - 1 = 0{,}9573 + 0{,}9633 - 1 = 0{,}9206$

f) $P(385{,}5 < X < 399{,}5) = P\left(\dfrac{385{,}5 - 416{,}8}{9{,}13} < Z < \dfrac{399{,}5 - 416{,}8}{9{,}13}\right) = P(-3{,}43 < Z < -1{,}89) = P(Z < -1{,}89) - P(Z < -3{,}43) = 1 - P(Z < 1{,}89) - (1 - P(Z < 3{,}43)) = P(Z < 3{,}43) - P(Z < 1{,}89) = 1 - 0{,}9706 = 0{,}0294$

g) $P(X > 397{,}5) = P\left(Z > \dfrac{397{,}5 - 416{,}8}{9{,}13}\right) = P(Z > -2{,}11) = 1 - P(Z < -2{,}11) = 1 - (1 - P(Z < 2{,}11)) = P(Z < 2{,}11) == 0{,}9826$

h) Ahora hay $n = 521 + 123 = 644 \Longrightarrow E(X) = 644 \cdot 0{,}8 = 515{,}2 \Longrightarrow 516$ compañeros estarán satisfechos.

i) $P(X < 436{,}5|x > 400{,}5) = \dfrac{P(400{,}5 < X < 436{,}5)}{P(X > 400{,}5)} = \dfrac{P\left(\dfrac{400{,}5 - 416{,}8}{9{,}13} < Z < \dfrac{436{,}5 - 416{,}8}{9{,}13}\right)}{P\left(Z > \dfrac{400{,}5 - 416{,}8}{9{,}13}\right)}$

$$\frac{P\left(-1{,}79 < Z < 2{,}16\right)}{P\left(Z > -1{,}79\right)} = \frac{P(Z < 2{,}16) - P(z < -1{,}79)}{1 - P(Z < -1{,}79)} = \frac{P(Z < 2{,}16) - (1 - P(z < 1{,}79))}{1 - (1 - P(Z < 1{,}79))} = \frac{P(Z < 2{,}16) + P(z < 1{,}79) - 1}{P(Z < 1{,}79)} = \frac{0{,}9846 + 0{,}9633 - 1}{0{,}9633} = 0{,}984$$

Problema 4 *(2.5 puntos)* Se sabe que el peso de los alumnos del ejercicio anterior se distribuye según una normal de media 65,3 kg y con una desviación típica de 6,51 kg. Si elegimos un de ellos al azar, se pide calcular las siguientes probabilidades:

a) (0.25 puntos) Que pese menos de 70 kg.

b) (0.25 puntos) Que pese más de 72 kg.

c) (0.25 puntos) Que pese más de 59 kg.

d) (0.25 puntos) Que pese entre 70 kg y 75 kg.

e) (0.50 puntos) Que pese más de 55 kg.

f) (0.50 puntos) Que pese entre 57 kg y 72 kg.

g) (0.50 puntos) Si se sabe que pesa más de 60 kg que su peso sea menor de 70 kg.

Solución:

a) $P(X < 70) = P\left(Z < \dfrac{70-65{,}3}{6{,}51}\right) = P(Z < 0{,}72) = 0{,}7642$

b) $P(X > 72) = P\left(Z > \dfrac{72-65{,}3}{6{,}51}\right) = P(Z > 1{,}03) = 1 - P(Z < 1{,}03) = 1 - 0{,}8485 = 0{,}1515$

c) $P(X > 59) = P\left(Z > \dfrac{59-65{,}3}{6{,}51}\right) = P(Z > -0{,}97) = 1 - P(Z < -0{,}97) = 1-(1-P(Z<0{,}97)) = P(z<0{,}97) = 0{,}834$

d) $P(70 < X < 75) = P\left(\dfrac{70-65{,}3}{6{,}51} < Z < \dfrac{75-65{,}3}{6{,}51}\right) = P(0{,}72 < Z < 1{,}49) = P(Z < 1{,}49) - P(Z < 0{,}72) = 0{,}9319 - 0{,}7642 = 0{,}1677$

e) $P(X > 55) = P\left(Z > \dfrac{55-65{,}3}{6{,}51}\right) = P(Z > -1{,}58) = 1 - P(Z < -1{,}58) = 1-(1-P(Z<1{,}58)) = P(z<1{,}58) = 0{,}9429$

f) $P(57 < X < 72) = P\left(\dfrac{57-65{,}3}{6{,}51} < Z < \dfrac{72-65{,}3}{6{,}51}\right) = P(-1{,}27 < Z < 1{,}03) = P(Z < 1{,}03) - P(Z < -1{,}27) = P(Z<1{,}03)-(1-P(Z<1{,}27)) = P(Z<1{,}03)+P(Z<1{,}27)-1 = 0{,}8485+0{,}9429-1 = 0{,}7465$

g) $P(X < 70|x > 60) = \dfrac{P(60<X<70)}{P(X>60)} = \dfrac{P\left(\dfrac{60-65{,}3}{6{,}51} < Z < \dfrac{70-65{,}3}{6{,}51}\right)}{P\left(Z > \dfrac{60-65{,}3}{6{,}51}\right)} =$

$\dfrac{P\left(-0{,}81 < Z < 0{,}72\right)}{P\left(Z > -0{,}81\right)} = \dfrac{P(Z<0{,}72)-P(z<-0{,}81)}{1-P(Z<-0{,}81)} = \dfrac{P(Z<0{,}72)-(1-P(z<0{,}81))}{1-(1-P(Z<0{,}81))} =$
$\dfrac{P(Z<0{,}72)+P(z<0{,}81)-1}{P(Z<0{,}81)} = \dfrac{0{,}7642+0{,}7910-1}{0{,}7910} = 0{,}7019$