Examen de Matemáticas II (Modelo 2018)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) (1,5 puntos) Obtener los valores de m para los que que la matriz $A-mI$ admite inversa.

b) (1 punto) Calcular la matriz inversa de $A - 2I$.

Solución:

a) $A - mI = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 0 & 3-m & 0 \\ 0 & -1 & 3-m \end{pmatrix} \Longrightarrow |A - mI| = -m(m-3)^2 = 0 \Longrightarrow m = 0$ y $m = 3$. Luego $\exists (A - mI)^{-1}$ si $m \in \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

b) $(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2,5 puntos)* Dada la función $f(x) = 2\cos(x) + |x-1|$, se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar el valor de $f'(0)$.

b) (1 punto) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi$.

c) (1 punto) Hallar el área del recinto plano limitado por la la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = \pi$ y $x = 2\pi$.

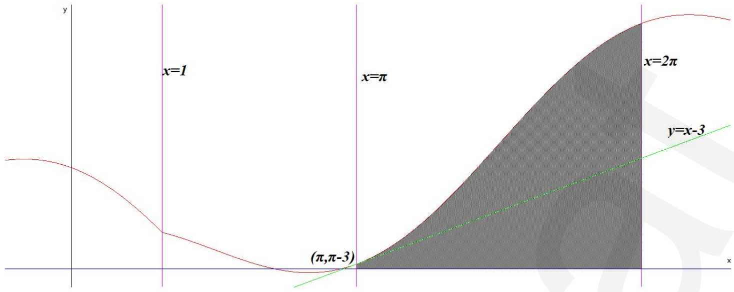
Solución:

a) $f(x) = \begin{cases} 2\cos x - x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 2\cos x + x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -2\sin x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -2\sin x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ luego $f'(0) = -1$.

b) La ecuación punto pendiente de la recta es $y - b = m(x - a)$ donde $b = f(a) = f(\pi) = 2\cos\pi + \pi - 1 = \pi - 3$ y $m = f'(\pi) = -2\sin\pi + 1 = 1$, la recta será: $y - (\pi - 3) = x - \pi \Longrightarrow y = x - 3$.

c) La función $f(x) = 2\cos x + x - 1 > 0$ no corta al eje de abcisas en $[\pi, 2\pi]$:

$$\int_{\pi}^{2\pi} (2\cos x + x - 1)\, dx = 2\sin x + \frac{x^2}{2} - x\Big]_{\pi}^{2\pi} = \frac{3\pi^2}{2} - \pi\ u^2$$



Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv 3x + y + 2z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z - 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar los puntos de la recta r equidistantes de π_1 y π_2.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo que forma el punto $P(-2, 3, 2)$ con los puntos de intersección de r con π_1 y π_2.

Solución:

a) Sea $P(1 - 2t, -1 + t, 1 + t)$ un punto cualquiera de la recta r:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Longrightarrow$$

$$\frac{|3(1-2t) + (-1+t) + 2(1+t) - 1|}{\sqrt{14}} = \frac{|2(1-2t) - (-1+t) + 3(1+t) - 1|}{\sqrt{14}} \Longrightarrow$$

$$|-3t+3| = |-2t+5| \Longrightarrow \begin{cases} -3t + 3 = -2t + 5 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow P_1(5, -3, -1) \\ -3t + 3 = 2t - 5 \Longrightarrow t = 8/5 \Longrightarrow P_2(-11/5, 3/5, 13/5) \end{cases}$$

b) Corte de r con π_1:
$-3t + 3 = 0 \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow A(-1, 0, 2)$
Corte de r con π_2:
$-2t + 5 = 0 \Longrightarrow t = 5/2 \Longrightarrow B(-4, 3/2, 7/2)$
$\overrightarrow{PA} = (1, -3, 0)$ y $\overrightarrow{PB} = (-2, -3/2, 3/2)$:

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{PB}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & -3/2 & 3/2 \end{vmatrix}| = \frac{3\sqrt{35}}{4}\ u^2$$

Problema 4 *(2,5 puntos)* Sabiendo que el peso de los estudiantes varones de segundo de bachillerato se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal, de media 74 kg y desviación típica 6 kg, se pide:

a) (1 punto) Determinar el porcentaje de estudiantes varones cuyo peso esta comprendido entre los 68 y 80 kg.

b) (0,5 puntos) Estimar cuántos de los 1500 estudiantes varones, que se han presentado a las pruebas de la EvAU en una cierta universidad, pesan más de 80 kg.

c) Si se sabe que uno de estos estudiantes pesa más de 76 kg, ¿cuál es la probabilidad de que pese más de 86 kg?

Solución:

$N(74, 6)$

a) $P(68 \leq X \leq 80) = P\left(\dfrac{68-74}{6} \leq Z \leq \dfrac{80-74}{6}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1) = P(Z \leq 1) - (1 - P(Z \leq 1) = 2P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826 \Longrightarrow 68,26\,\%$

b) $P(X \geq 80) = 1 - P(X \leq 80) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{80-74}{6}\right) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,1587 \Longrightarrow 15,87\,\% \Longrightarrow$ 238 estudiantes pesarán más de 80 *kg*.

c) $P(X \geq 86 | X \geq 76) = \dfrac{P(\{X \geq 86\} \cap \{X \geq 76\})}{P(X \geq 76)} = \dfrac{P(X \geq 86)}{P(X \geq 76)} = \dfrac{1 - P(X \leq 86)}{1 - P(X \leq 76)} = \dfrac{1 - P\left(Z \leq \frac{86-74}{6}\right)}{1 - P\left(Z \leq \frac{76-74}{6}\right)} = \dfrac{1 - P(Z \leq 2)}{1 - P(Z \leq 0,33)} = \dfrac{1 - 0,9772}{1 - 0,6293} = 0,0615$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2018) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2,5 puntos)* Dada la matriz A y los vectores X y B siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2+m \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema lineal $AX = B$ en función de los valores del parámetro m.

b) (0,5 puntos) Resolver el sistema lineal $AX = B$ cuando $m = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m+1 & 1 \\ 1 & m & m & 2+m \end{array}\right) \quad |A| = -m(m-1) = 0 \Longrightarrow m = 0, \quad m = 1$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $m = -1$:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -x + y = 1 \\ x - y - z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2,5 puntos)* El dibujo adjunto muestra la gráfica de la función

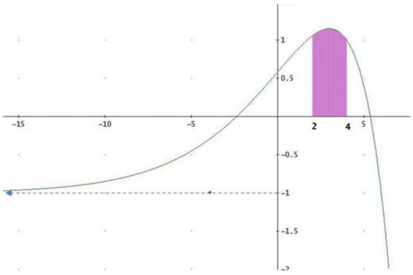
$$f(x) = (6 - x)e^{\frac{x-4}{3}} - 1$$

se pide:

a) (1 punto) Calcular el área de la region sombreada.

b) (1 punto) Determinar la abscisa del punto de la gráfica donde la recta tangente tiene pendiente máxima.

c) (0,5 puntos) Efectuando los cálculos necesarios, obtener la ecuación de la asíntota que se muestra en el dibujo (flecha discontinua inferior).



Solución:

a)

$$F(x)=\int((6-x)e^{\frac{x-4}{3}}-1)\,dx=\left[\begin{array}{c} u=(6-x)\Longrightarrow du=-dx\\ dv=e^{\frac{x-4}{3}}dx\Longrightarrow v=3e^{\frac{x-4}{3}}\end{array}\right]=$$

$$3(6-x)e^{\frac{x-4}{3}}+3\int e^{\frac{x-4}{3}}\,dx-x=3(6-x)e^{\frac{x-4}{3}}+9e^{\frac{x-4}{3}}-x=(27-3x)e^{\frac{x-4}{3}}-x$$

$$S=\int_2^4((6-x)e^{\frac{x-4}{3}}-1)\,dx=F(4)-F(2)=13-\frac{21}{e^{2/3}}=2,218\ u^2$$

b) $g(x)=f'(x)=\left(\dfrac{3-x}{3}\right)e^{\frac{x-4}{3}}\Longrightarrow g'(x)=-\dfrac{xe^{\frac{x-4}{3}}}{9}=0\Longrightarrow x=0$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
$g'(x)$	$+$	$-$
$g(x)$	creciente	decreciente

Luego en $x=0$ habrá un máximo punto en el que la pendiente a $f(x)$ es máxima..

c) $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}((6-x)e^{\frac{x-4}{3}}-1)=-1+\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}(6+t)e^{-\frac{t+4}{3}}=-1+\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\dfrac{6+t}{e^{\frac{t+4}{3}}}=$
$\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=-1+\lim\limits_{t\longrightarrow\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{t+4}{3}}}=-1+0\Longrightarrow y=-1$

Problema 3 *(2,5 puntos)* Dados los planos $\pi_1\equiv x+y=0$, $\pi_2\equiv x=0$ y el punto $B(-1,1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Determinar el punto B', simétrico de B respecto del plano π_2.

b) (1 punto) Obtener una ecuación de la recta r, contenida en el plano π_1, paralela al plano π_2 y que pasa por el punto B.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

Solución:

a) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calcular la recta $t \perp \pi_2 / B \in t$. Tenemos $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_{\pi_2}} = (1, 0, 0)$: $t : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$
- Calcular el punto de corte B'' de t con π_2: $1 - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow B''(0, 1, 1)$
- $\dfrac{B + B'}{2} = B'' \Longrightarrow B' = 2B'' - B = (0, 2, 2) - (-1, 1, 1) = (1, 1, 1)$

b) $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -1) \Longrightarrow r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}||\overrightarrow{u_{\pi_2}}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$ radianes.

Problema 4 *(2,5 puntos)* En una bolsa hay 10 caramelos de fresa, 15 de menta y 5 de limón. Se extraen sucesivamente de la bolsa dos caramelos. Se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que el segundo de ellos sea de fresa.

b) (0,5 puntos) Determinar la probabilidad de que los dos sean de fresa.

c) (1 punto) Sabiendo que el segundo ha sido de fresa, calcular la probabilidad de que lo haya sido también el primero.

Solución:

Sale fresa: F, sale menta: M y sale limón: L

a) $P(2^{\text{o}} \text{ de fresa}) = P(FF) + P(MF) + P(LF) = \dfrac{10}{30} \cdot \dfrac{9}{29} + \dfrac{15}{30} \cdot \dfrac{10}{29} + \dfrac{5}{30} \cdot \dfrac{10}{29} = \dfrac{1}{3}$

b) $P(FF) = \dfrac{10}{30} \cdot \dfrac{9}{29} = \dfrac{3}{29}$

c) $P(\text{primero fresa}|\text{segundo fresa}) = \dfrac{P(\text{primero fresa} \cap \text{segundo fresa})}{P(\text{segundo fresa})} = \dfrac{10/30 \cdot 9/29}{1/3} = \dfrac{9}{29}$