Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2018

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{2}{x}$ y $g(x) = \sin x$, se pide:

a) (1 punto). Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(f(x) - \dfrac{2}{g(x)}\right)$.

b) (0,75 puntos). Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

c) (1,25 puntos). Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

(Junio 2017 - Opción B)

Solución:

a) $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{\sin x}\right) = [\infty-\infty] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{2\sin x - 2x}{x\sin x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{2\cos x - 2}{\sin x + x\cos x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{-2\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0$

b) $f(x) = \dfrac{2}{x} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} \Longrightarrow m = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = -8$ luego la ecuación de la recta en su forma punto pendiente es: $y - 4 = -8\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

c) $\dfrac{2}{x} = -x + 3 \Longrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 1,\;\; x = 2$:

$$S_1 = \int_1^2 \left(\frac{2}{x} + x - 3\right)\, dx = 2\ln x + \frac{x^2}{2} - 3x\Big]_1^2 = -\frac{3}{2} + 2\ln 2 \simeq -0,114$$

$$S = |S_1| = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \simeq 0,114\ u^2$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5-x} & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{5+x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Septiembre 2016 - Opción B)

Solución:

a) Continuidad: Las ramas son continuas para cualquier valor, estudiamos en $x = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{1}{5-x} = \frac{1}{5} \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{5+x} = \frac{1}{5} \\ f(0) = \frac{1}{5} \end{array}\right.$$

Luego la función es continua en R.
Asíntotas verticales no tiene y las horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{1}{5-x} = 0; \text{ y } \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{1}{5+x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Oblicuas no hay al tener horizontales.

b)

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{(5-x)^2} & \text{si} & x \leq 0 \\ \frac{-1}{(5+x)^2} & \text{si} & x > 0 \end{array}\right. \Longrightarrow f'(0^-) = \frac{1}{25} \neq f'(0^+) = -\frac{1}{25}$$

luego la función es derivable en $R - \{0\}$.

c)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{5-x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{5+x}\,dx =$$

$$-\ln|5-x|\big]_{-1}^{0} + \ln|5+x|\big]_{0}^{1} = 2\ln\left(\frac{6}{5}\right) = 0,365$$

Problema 3 *(2 puntos)*

a) (0,5 puntos). Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

b) (1,5 puntos). Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una úunica solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

(Septiembre 2015 - Opción A)

Solución:

a) $f'(x) = 2 + 6x + 12x^2 > 0 \Longrightarrow$ la función es siempre creciente.

b) Es una función polinómica y, por tanto, continua:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

Por el Teorema de Bolzano la función polinómica tiene puntos de corte con el eje OX y, como esta función es creciente en R, concluimos que sólo hay un punto de corte.(Sólo hay una solución)
$f(0) = 1$ y $f(-1) = -2 \Longrightarrow$ por el Teorema de Bolzano la función polinómica tiene el punto de corte en el intervalo $(-1, 0)$ de longitud 1.

Problema 4 *(2 puntos)*

a) (2 punto). Determinar los valores a, b, c para que la función $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ ax - b & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ x^2 + bx + c & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ sea continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$.

b) (1 punto). Aplicar, si es posible, el Teorema del Valor Medio a la función $g(x) = x^2 + x$ en el intervalo $[1, 2]$ y calcular, en tal caso, un punto de dicho intervalo en el que $g'(x)$ tome el valor predicho por el Teorema del Valor Medio.

(Junio 2015 (coincidente)- Opción A)
Solución:

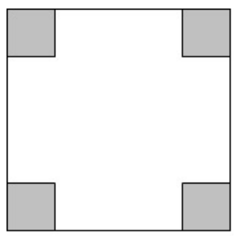
a) Continua en $x = 0$: $f(0) = -1$ y $\lim_{x\longrightarrow 0^+} (ax - b) = -b \Longrightarrow b = 1$
Continua en $x = 1$: $\lim_{x\longrightarrow 1^-} (ax - b) = a - b$ y $\lim_{x\longrightarrow 1^+} (x^2 + bx + c) = 1 + b + c \Longrightarrow a - b = 1 + b + c \Longrightarrow a - 2b - c = 1$
Luego $a - 2 - c = 1 \Longrightarrow a - c = 3$
Derivable en $x = 1$: $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ a & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ 2x + b & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$ $f'(1^-) = a$,
$f'(1^+) = 2 + b \Longrightarrow a - b = 2 \Longrightarrow a = 3 \Longrightarrow c = 0$

b) La función g es continua en el intervalo $[1, 2]$ y también derivable en $(1, 2)$. ($g(x) = x^2 + x$ y $g'(x) = 2x + 1$) Por el Teorema del Valor Medio
$\exists c \in (1, 2)/g'(c) = \dfrac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = \dfrac{6 - 2}{1} = 4$
$g'(c) = 2c + 1 = 4 \Longrightarrow c = \dfrac{3}{2}$

Problema 5 *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG.

Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?
(Junio 2016 (coincidente) - Opción A)
Solución:
x :precio de la papeleta.
$f(x) = x(5000 - (x - 2)500) = -500x^2 + 6000x$
$f'(x) = -1000x + 6000 = 0 \Longrightarrow x = 6$
$f''(x) = -1000 \Longrightarrow f(6) = -1000 < 0 \Longrightarrow x = 6$ euros es un máximo que produciría un importe de $f(6) = 18000$ euros, si restamos el precio del ordenador tendríamos que se dona a la ONG la cantidad de $18000 - 600 = 17400$ euros.

Problema 6 *(2 puntos)* Se dispone de una plancha de cartón cuadrada cuyo lado mide 1,2 metros. Determínense las dimensiones de la caja (sin tapa) de volumen máximo que se puede construir, recortando un cuadrado igual a cada esquina de la plancha y doblando adecuadamente para unir las aristas resultantes de los cortes.
(Septiembre 2017 (coincidente) - Opción B)



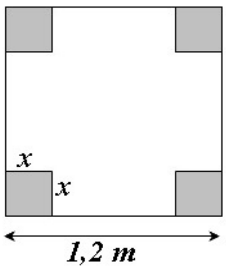
Solución:

$$V(x) = (1,2 - 2x)^2 x = (1,44 + 4x^2 - 4,8x)x = 4x^3 - 4,8x^2 + 1,44x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 9,6x + 1,44 = 0 \Longrightarrow x = 0,2, \quad x = 0,6$$

$$V''(x) = 24x - 9,6 \Longrightarrow \begin{cases} V''(0,2) = -4,8 < 0 \Longrightarrow x = 0,2 \text{ máximo} \\ V''(0,6) = 4,8 > 0 \Longrightarrow x = 0,6 \text{ mínimo} \end{cases}$$

El volumen máximo sería $V(0,2) = 0,128$


x
x
1,2 m