Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2017

Problema 1 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & 2y+ & kz = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ kx+ & 2y- & z = & 3 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (1,5 puntos). Discutirlo según los valores de k.
2. (0,25 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.
3. (0,25 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

(Modelo 2016 - Opción A)
Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ k & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad |A| = -4k^2 + 6k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1,\ k = \frac{1}{2}$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq 1/2 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right);\ |A| = 0;\ \left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0;\ \ |A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right| = 0;$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{crc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right| = 0;\ \ |A_4| = \left|\begin{array}{crc} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right| = 0$$

$\left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$.
Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ nº de incógnitas y el sistema es

compatible indeterminado.

Si $m = 1/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1/2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right); \ |A| = 0; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) \Longrightarrow \text{ sistema}$$
incompatible.

2. Si $k = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ 2x+ & 2y- & z = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{array}\right.$$

3. Si $k = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda/2 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

1. (0,5 puntos). Determinar los valores del parámetro a, para que la matriz M tenga inversa.

2. (1 punto). Hallar la inversa de M, para $a = 2$.

3. (0,5 puntos). Resolver el sistema homogéneo $MX = O$, para $a = 1$.

(Septiembre 2015 (coincidente)- Opción A)
Solución:

1. $|M| = 2a^2 - 5a + 3 = 0 \Longrightarrow a = 1$ y $a = 3/2$:
   Si $a \neq 1$ y $a \neq 3/2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow \exists M^{-1}$
   Si $a = 1$ o $a = 3/2 \Longrightarrow |M| = 0 \Longrightarrow \nexists M^{-1}$.

2. Si $a = 2$: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Si $a = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ como $F_2 = -F_1 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado: $\left\{ \begin{array}{l} y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

Problema 3 *(1 puntos)* A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3?
(Modelo 2017 - Opción B)
Solución:
Sea x el número de rosas, y el número de tulipanes y z el número de lilas de un ramo, respectivamente.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 24 \\ x = 2(y + z) \\ 6x + 4y + 3z = \frac{610}{5} = 122 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 24 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 6x + 4y + 3z = 122 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 16 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{array} \right.$$