Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
Octubre 2017

Problema 1 Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & -m & 3 \\ 2 & m & 3 & 2 \\ m & -4 & 9 & -5 \end{pmatrix}$$

Calcular el rango de A para los diferentes valores de m.

Solución:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} m & 2 & -m \\ 2 & m & 3 \\ m & -4 & 9 \end{vmatrix} = m^3 + 9m^2 + 26m - 36 = 0 \Longrightarrow m = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m & 2 \\ m & -4 & -5 \end{vmatrix} = -4(2m^2 - 3m + 1) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = \frac{1}{2}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} m & -m & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ m & 9 & -5 \end{vmatrix} = -2(m^2 + 26m - 27) = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = -27$$

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 2 & -m & 3 \\ m & 3 & 2 \\ -4 & 9 & -5 \end{vmatrix} = -5m^2 + 35m - 30 = 0 \Longrightarrow m = 1, \ \ m = 6$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.

Cuando $m = 1 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$, ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$.

Problema 2 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

1. Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.
2. Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.

3. Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

Nota: Examen de Septiembre de la Comunidad de Madrid (Opción B)
Solución:

1. $B=(A-I)(2I+2A)=2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

2. $A-I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $|A-I|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A-I)=2$.

   $$A^2-I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow \text{Rango}(A^2-I)=1.$$

   $A^3-I=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $|A^3-I|=0$ y $\begin{vmatrix} 7 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-7\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A-I)=2$.

3. $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$:

   $$A^n=\left\{\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par}\\ \\ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar}\end{array}\right.\Longrightarrow A^6=\begin{pmatrix} 64 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

   $$(A^6)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/64 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Problema 3 Resolver el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 2X+Y=\begin{pmatrix} 3 & 1\\ -2 & 5\end{pmatrix}\\ \\ X+Y=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Solución:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2X + Y = \left(\begin{array}{rr} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{array} \right) \\ \\ X + Y = \left(\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \left(\begin{array}{rr} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{array} \right) \\ \\ Y = \left(\begin{array}{rr} -1 & -3 \\ -2 & -3 \end{array} \right) \end{array} \right.$$

Problema 4 Calcular todas las matrices X que cumplan $AX = XA$ donde $A = \left(\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right)$

Solución:

LLamamos $X = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right)$:

$$AX = XA \Longrightarrow \left(\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \left(\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc} 2a + c & 2b + d \\ -c & -d \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 2a & a - b \\ 2c & c - d \end{array} \right) \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a + c = 2a \Longrightarrow \ c = 0 \\ 2b + d = a - b \Longrightarrow \ a = 3b + d \\ -c = 2c \Longrightarrow \ c = 0 \\ -d = c - d \Longrightarrow \ c = 0 \end{array} \right.$$

Luego $X = \left(\begin{array}{cc} 3b + d & b \\ 0 & d \end{array} \right)$.