Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II-Coincidente (Septiembre 2017) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1+a \\ a & a & a \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Estúdiese para qué valores del parámetro real a la matriz A tiene inversa.

b) Determínese, para $a = 1$, la matriz X tal que $A \cdot X = Id$, siendo Id la matriz identidad de tamaño 3×3.

Solución:

a) $|A| = a^3 - 2a^2 = a^2(a-2) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$ luego $\exists A^{-1} \Longleftrightarrow a \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$

b) Si $a = 1$ y $A \cdot X = Id \Longrightarrow X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$2x + y \le 16; \quad x + y \le 11; \quad x + 2y \ge 6; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0.$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices. ¿Pertenece el punto $(4, 4)$ a S?

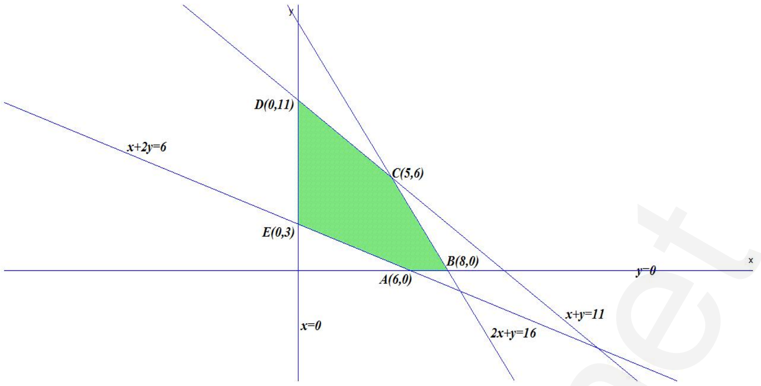
b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x+y$ en la región S, indicando los puntos en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 3x + y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} 2x + y \le 16 \\ x + y \le 11 \\ x + 2y \ge 6 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $A(6, 0)$, $B(8, 0)$, $C(5, 6)$, $D(0, 11)$ y $E(0, 3)$:
El punto $(4, 4)$ está dentro de esta región, es decir, cumple todas las restricciones, $(4, 4) \in S$.



b)

$$\begin{cases} f(6,0) = 18 \\ f(8,0) = 24 \text{ Máximo} \\ f(5,6) = 21 \\ f(0,11) = 11 \\ f(0,3) = 3 \text{ Mínimo} \end{cases}$$

El mínimo es 3 y se alcanza en el punto $E(0,3)$ y el máximo es de 24 y se alcanza en el punto $B(8,0)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \le x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) Estúdiese la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) Determínese el área del recinto acotado por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

a) Continuidad en $x = -1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} (x^2 - 2x) = 3 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} (x) = -1 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{discontinuidad no evitable}$$

Continuidad en $x = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} (x) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} (-x^2 + 2x) = 1 \\ f(1) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \text{es continua}$$

Luego f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

b) La función no corta al eje de abcisas en los intervalos $(0,1)$ y $(1,2)$ Serán dos áreas a estudiar, S_1 en el intervalo $(0,1)$ y S_2 en el $(1,2)$.
$S_1 = \displaystyle\int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$
$S_2 = \displaystyle\int_1^2 (-x^2+2x)\,dx = \left.-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_1^2 = \frac{2}{3}$

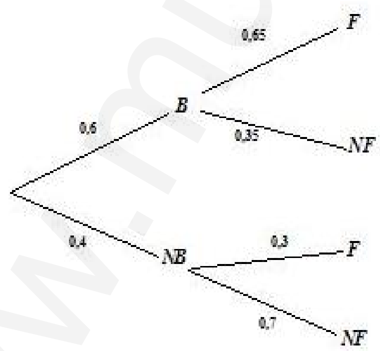
$$S = |S_1| + |S_2| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}\ u^2$$

Problema 4 *(2 puntos)* En un centro de danza el 60 % de los alumnos recibe clases de ballet. Por otro lado, entre quienes reciben clases de ballet, el 65 % también recibe clase de flamenco. Además sólo el 30 % de quienes no reciben clases de ballet recibe clases de flamenco. Calcúlese la probabilidad de que un alumno de dicho centro elegido al azar:

a) Reciba clases de flamenco.

b) Reciba clases de ballet si no recibe clases de flamenco.

Solución: B: reciben clases de ballet y F: reciben clases de flamenco.



a) $P(F) = P(F|B)P(B) + P(F|NB)P(NB) = 0,65\cdot 0,6 + 0,3\cdot 0,4 = 0,51$

b) $P(B|NF) = \dfrac{P(NF|B)P(B)}{P(NF)} = \dfrac{0,35\cdot 0,6}{1-0,51} = 0,429$

Problema 5 *(2 puntos)* El precio, en euros, de un cierto producto en las diferentes tiendas de una determinada ciudad se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 15$ euros.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de diez tiendas de esa ciudad y se ha anotado el precio del producto en cada una de ellas. Estos precios son los siguientes:

$$140; \quad 125; \quad 140; \quad 175; \quad 135; \quad 165; \quad 175; \quad 110; \quad 150; \quad 130.$$

Determínese un intervalo de confianza con un nivel del 95 % para μ.

b) Calcúlese el mínimo tamaño muestral necesario para que el error máximo cometido al estimar μ por la media muestral sea a lo sumo de 8 euros, con un nivel de confianza del 95 %.

Solución:
$N(\mu, 15)$

a) y $n = 10$, $\overline{X} = 144,5$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{15}{\sqrt{10}} = 9,297$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (135,203; 153,797)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,96$ y $E = 8$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{15}{\sqrt{n}} = 8 \Longrightarrow n \geq 13,51$$

$$n = 14$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II-Coincidente (Septiembre 2017) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{c} -x + ay + z = 3 \\ 2y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = -3 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = 0$.

Solución:

a)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right); \quad |A| = 2a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

- Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 0$:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - 3F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Luego en este caso el sistema es compatible indeterminado.

b) $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{c} -x + z = 3 \\ y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = (3x^2 - 2x)^2$$

a) Calcúlese $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

b) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (9x^4 - 12x^3 + 4x^2)\,dx = \left.\frac{9x^5}{5} - 3x^4 + \frac{4x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{94}{15}$

b) Sea $y - b = m(x - a)$ la ecuación punto pendiente de la recta tangente tenemos que $b = f(a) = f(2) = 64$ y como $f'(x) = 2(3x^2 - 2x)(6x - 2) \Longrightarrow m = f'(2) = 160$:

$$y - 64 = 160(x - 2)$$

Problema 3 *(2 puntos)* La función de beneficio (en euros) de una empresa que fabrica cables de electricidad viene dada por la función

$$b(x) = -x^2 + 120x - 3200$$

donde x representa la cantidad de metros de cable elaborados diariamente.

a) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que la empresa no tenga ganancias ni pérdidas?

b) ¿Cuántos metros de cable deben fabricarse para que se obtenga el máximo beneficio?

(Observación: valores negativos de $b(x)$ implican que la empresa tiene pérdidas, mientras que valores positivos implican ganancias)

Solución:

a) $b(x) = -x^2 + 120x - 3200 = 0 \Longrightarrow x = 40$ m y $x = 80$ m.

b) $b'(x) = -2x + 120 = 0 \Longrightarrow x = 60$ para comprobar si es un máximo recurrimos a la segunda derivada: $b''(x) = -2 \Longrightarrow b''(60) = -2 < 0 \Longrightarrow$ hay un máximo cuando se producen 60 m con un beneficio de $b(60) = 400$ euros.

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0,5$, $P(A|B) = 0,375$ y $P(B \cap A) = 0,3$. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Ocurra B.

b) Ocurra B pero no A

Solución:

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \dfrac{0,3}{0,375} = 0,8$

b) $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,375 = 0,425$

Problema 5 *(2 puntos)* El consumo de combustible, en litros cada 100 kilómetros (l/100km), de los vehículos nuevos matriculados en España se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 1,2$ l/100km. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 49.

a) Calcúlese el nivel de confianza con el que se ha obtenido el intervalo de confianza $(4,528; 5,2)$ para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 4,8$ l/100km. Calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, esté comprendida entre $4,5$ y $5,1$ l/100km.

Solución:

$$N(\mu; 1,2)$$

a) $\sigma = 1,2$, $n = 49$, $IC = (4,528; 5,2) \Longrightarrow E = \dfrac{5,2 - 4,528}{2} = 0,336$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = \frac{E\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0,336\sqrt{49}}{1,2} = 1,96$$

$$P\left(Z \leq 1,96\right) = 0,975 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0,05 \Longrightarrow NC = 95\,\%$$

b) $\mu = 4,8$:

$$P(4,5 \leq \overline{X} \leq 5,1) = P\left(\frac{4,5 - 4,8}{1,2/\sqrt{49}} \leq Z \leq \frac{5,1 - 4,8}{1,2/\sqrt{49}}\right) =$$

$$P(-1,75 \leq Z \leq 1,75) = 2P(z \leq 1,75) - 1 = 2 \cdot 0,9599 - 1 = 0,9198$$