Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II-Coincidente (Junio 2017) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calcúlese la matriz $D = A^T \cdot B$. ¿Existe la matriz $F = A \cdot B$?

b) Calcúlese la matriz $M = B^{-1}$.

Nota: A^T denota la matriz traspuesta de la matriz A.

Solución:

a) $D = A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 9 & 26 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Como el número de columnas de A es distinto al número de filas de B la matriz $F = A \cdot B$ no existe.

b) $M = B^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$x + y \geq 2; \quad 2x - y \leq 4; \quad 2y - x \leq 4; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

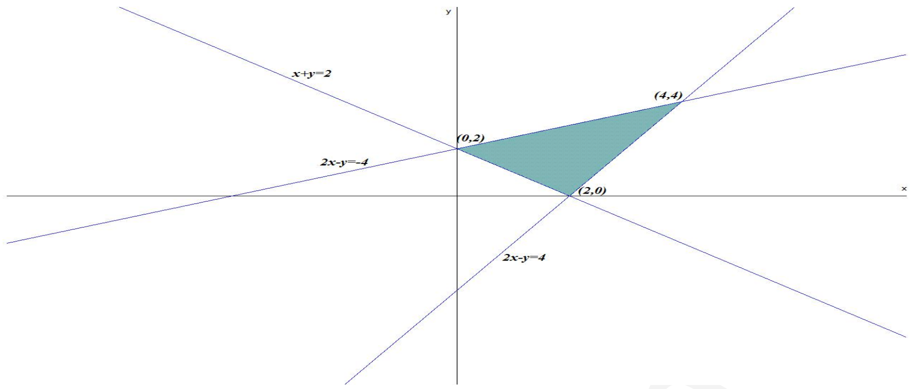
b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = -5x + 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = -5x+3y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \left\{ \begin{array}{l} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2y - x \leq 4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \\ x - 2y \geq -4 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $(2, 0)$, $(4, 4)$, y $(0, 2)$:



b)

$$\begin{cases} f(0,2) = 6 \ \text{Máximo} \\ f(2,0) = -10 \ \text{Mínimo} \\ f(4,4) = -8 \end{cases}$$

El mínimo es -10 y se alcanza en el punto $(2,0)$ y el máximo es de 6 y se alcanza en el punto $(0,2)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$$

.

a) Calcúlese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ x = 1$ y $x = 3$. Tendremos dos áreas S_1 con un intervalo de integración $[0,1]$ y otro S_2 con un intervalo de integración $[1,3]$.

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$S_1 = \int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_1^3 = -\frac{8}{3}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ u^2$$

b) $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$

	$(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3})$	$(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}, \infty\right)$ y decreciente en $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)$.

Problema 4 *(2 puntos)* El profesorado de cierta Facultad de Cc. Económicas y Empresariales está compuesto por profesores de Economía y de Empresa. El 60 % son de Economía y el 40 % de Empresa. Además el 55 % del profesorado de esa facultad son mujeres. De ellas, el 52 % son de Empresa. Calcúlese la probabilidad de que un miembro del profesorado de dicha Facultad de Cc. Económicas y Empresariales elegido al azar:

a) Sea una mujer si se sabe que es de Empresa.

b) Sea de Economía y sea mujer.

Solución:

$$P(Ec) = 0,6, \;\; P(Em) = 0,4, \;\; P(M) = 0,55, \;\; P(H) = 0,45$$

$$P(Em|M) = 0,52, \;\; P(Ec|M) = 0,48$$

a) $P(M|Em) = \dfrac{P(Em|M) \cdot P(M)}{P(Em)} = \dfrac{0,52 \cdot 0,55}{0,4} = 0,715$

b) $P(Ec \cap M) = P(Ec|M) \cdot P(M) = 0,48 \cdot 0,55 = 0,264$

Problema 5 *(2 puntos)* La producción diaria de cemento, medida en toneladas, de una factoría cementera se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 9$ toneladas.

a) Determínese el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para que el correspondiente intervalo de confianza para μ al 95 % tenga una amplitud a lo sumo de 2 toneladas.

b) Se toman los datos de producción de 16 días escogidos al azar. Calcúlese la probabilidad de que la media de las producciones obtenidas, $\overline{X}$, sea menor o igual a 197,5 toneladas si sabemos que $\mu = 202$ toneladas.

Solución:

$$N(\mu; 9)$$

a) $E = 1$ (la mitad de la amplitud del intervalo de confianza) y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\frac{9}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq (1,96\cdot 9)^2 = 311,1696 \Longrightarrow n = 312.$$

b) $n = 16$ y $\mu = 202 \Longrightarrow \overline{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(202; 2,25)$

$$P(\overline{X} \leq 197,5) = P\left(Z \leq \frac{197,5-202}{2,25}\right) =$$

$$P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II-Coincidente (Junio 2017) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{l} -x+3y+3z=0 \\ -x+3y+z=1 \\ -x+ay+2z=0 \end{array}\right.$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

b) Resuélvase para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & a & 2 & 0 \end{array}\right); \quad |A| = 6 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ 2F_3 - F_2 \end{array}\right] = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

b) Si $a = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{r} -x + 3y + 3z = 0 \\ -x + 3y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -3/4 \\ y = 1/4 \\ z = -1/2 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rll} 5x + 1 & \text{si} & x \le 0 \\ x^2 + 5x + 1 & \text{si} & x > 0 \end{array} \right.$$

a) Determínese si la función $f(x)$ es derivable en $x = 0$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución:

a) Para que sea derivable tiene que ser continua:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (5x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^2 + 5x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Luego f es continua en $x = 0$. Comprobamos la derivabilidad:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{rll} 5 & \text{si} & x \le 0 \\ 2x + 5 & \text{si} & x > 0 \end{array} \right. \Longrightarrow f'(0^-) = f'(0^+) = 5$$

Luego f es derivable en $x = 0$.

b) En $x = 3 \Longrightarrow f(x) = x^2 + 5x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 2x + 5$
$b = f(3) = 25$, $m = f'(3) = 11$. La ecuación de la recta tangente es:
$y - 25 = 11(x - 3)$ (ecuación punto pendiente)

Problema 3 *(2 puntos)* Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es:

$$f'(x) = x^2 + 8x + 15$$

a) Determínese la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 1/3$.

b) Determínense los máximos y los mínimos locales de $f(x)$, si los tuviese.

Solución:

a) $f(x) = \int (x^2 + 8x + 15)\, dx = \dfrac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x + C$

$$f(1) = \frac{1}{3} + 4 + 15 + C = \frac{1}{3} \Longrightarrow C = -19$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 15x - 19$$

b) $f'(x) = x^2 + 8x + 15 = 0 \Longrightarrow x = -5$ y $x = -3$:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, -3)$	$(-3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-5, -3)$.

La función tiene un mínimo en $(-3, -37)$ y un máximo en $(-5, -107/3)$.

Problema 4 *(2 puntos)* Una máquina tiene dos chips de control A y B. Se sabe que al encender la máquina la probabilidad de que falle el chip A es de 0,2, la probabilidad de que falle el B es de 0,3 y la probabilidad de que fallen los dos es de 0,015. Calcúlese la probabilidad de que al encender la máquina:

a) Haya fallado el chip A si se sabe que ha fallado el B.

b) No falle ninguno de los dos chips.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.
Solución:

$$P(A) = 0,2, \quad P(B) = 0,3, \quad P(A \cap B) = 0,015$$

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,015}{0,3} = 0,05$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$

$$1 - (0,2 + 0,3 - 0,015) = 0,515$$

Problema 5 *(2 puntos)* El peso, en gramos (gr), de la bandeja de salmón crudo que se vende en una gran superficie, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ gr. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 10 bandejas.

a) Si la media muestral de los pesos ha sido $\overline{X} = 505$ gr, calcúlese un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Supóngase ahora que $\mu = 500$ gr. Calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 10 bandejas sea mayor o igual a 5030 gr.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 2,575$, $n = 10$ y $\overline{X} = 505$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{25}{\sqrt{10}} = 20,357$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} - E) = (484,643; 525,357)$$

b) $\mu = 500$ y $\overline{X} = \dfrac{5030}{10} = 503$:

$$P(\overline{X} \geq 503) = P\left(Z \geq \frac{503 - 500}{25/\sqrt{10}}\right) = P(Z \geq 0,38) = 1-P(Z \leq 0,38) =$$

$$1 - 0,6480 = 0,3520$$