Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)
Abril 2017

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-9}$$

a) Calcúlense sus asíntotas.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:**
  $x = 3$

$$\lim_{x\longrightarrow 3} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

  $x = -3$

$$\lim_{x\longrightarrow -3} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\frac{6}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{x^2-3}{x^2-9} = \left[\frac{6}{0^-}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** $y = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x^2-3}{x^2-9} = 1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales b)

$$f'(x) = -\frac{12x}{(x^2-9)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$.

La función es decreciente en el intervalo $(0, 3) \cup (3, \infty)$.

La función tiene un máximo en $(0, 1/3)$.

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x+b}{x-2} & \text{si} \quad x \le -1 \\ \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x = -1$.

b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

Solución:

a) Continuidad en $x = -1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow -1^-} \dfrac{-x+b}{x-2} = -\dfrac{1+b}{3} \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow -1^+} \dfrac{2x+6}{2x+4} = 2 \end{cases}$$

Luego $-\dfrac{1+b}{3} = 2 \Longrightarrow b = -7$

b) Asíntotas:

- Si $x \le -1$ no hay asíntotas verticales ($x = 2$ no está en la rama). Si hay horizontales $y = -1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{-x+b}{x-2} = -1$$

- Si $x > -1$ no hay asíntotas verticales, los valores que anulan el denominador ($x = -1$ y $x = -3$) no están en la rama. Si hay horizontales $y = 1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = 1$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^3 + 8$$

.

a) Determínese el área de la región acotada delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y por las rectas $x = -3$ y $x = -1$.

b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a) $x^3 + 8 = 0 \Longrightarrow x = -2$ luego hay que separar dos áreas S_1 en el intervalo $[-3, -2]$ y S_2 en el intervalo $[-2, -1]$.

$$S_1 = \int_{-3}^{-2} (x^3 + 8)\, dx = \frac{x^4}{4} + 8x\Big]_{-3}^{-2} = -\frac{33}{4}$$

$$S_1 = \int_{-2}^{-1} (x^3 + 8)\, dx = \frac{x^4}{4} + 8x\Big]_{-2}^{-1} = \frac{17}{4}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{33}{4} + \frac{17}{4} = \frac{25}{2}\ u^2$$

b) $b = f(1) = 9$, $f'(x) = 3x^2$, $m = f'(1) = 3$. La ecuación de la recta tangente es: $y - 9 = 3(x - 1)$

Problema 4 *(2 puntos)* Para efectuar cierto diagnóstico, un hospital dispone de dos escáneres, a los que denotamos como A y B. El 65 % de las pruebas de diagnóstico que se llevan a cabo en ese hospital se realizan usando el escáner A, el resto con el B. Se sabe además que el diagnóstico efectuado usando el escáner A es erróneo en un 5 % de los casos, mientras que el diagnóstico efectuado usando el escáner B es erróneo en un 8 % de los casos. Calcúlese la probabilidad de que:

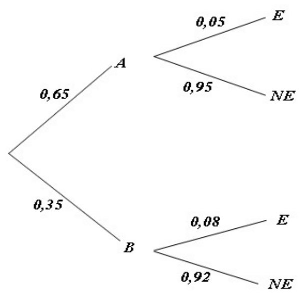
a) El diagnóstico de esa prueba efectuado a un paciente en ese hospital sea erróneo.

b) El diagnóstico se haya efectuado usando el escáner A, sabiendo que ha resultado erróneo.

Solución:

a)

$$P(E) = 0,65 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,08 = 0,0605$$



b)

$$P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \frac{0{,}05 \cdot 0,65}{0,0605} = 0,5372$$

Problema 5 *(2 puntos)* El peso en kilogramos (kg) de los recién nacidos en 2014 en cierta ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0,60$ kg.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y se obtiene un peso medio para los recién nacidos de esa ciudad de $\overline{X} = 3,250$ kg. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el error cometido en la estimación de μ, con un nivel de confianza del 95 %, sea a lo sumo de 0,2 kg.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 2,325$, $n = 100$ y $\overline{X} = 3,25$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,6}{\sqrt{100}} = 1,325$$

$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} - E) = (3,1105; 3,3895)$$

b) $E = 0,2$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$0,2 = 1,96\frac{0,6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 34,5744 \Longrightarrow n = 35$$