

Examen de Matemáticas 2º Bachillerato (CS)
Noviembre 2016

Problema 1 (4 puntos) Se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$

1. Discútase el sistema para los diferentes valores del $a \in \mathbb{R}$.
2. Resuélvase para $a = 0$.

(Junio 2016 - Opción B)

Solución:

1.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = -2a + 4 = 0 \implies a = 2$$

- Si $a \neq 2 \implies |A| \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\bar{A}) = n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 2$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \implies \text{Rango}(A) = 2$$

como $|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = 0 \implies \text{Rango}(\bar{A}) = 2 = \text{Rango}(A) < n^\circ$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

2. Si $a = 0$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 1/4 \\ z = -1/2 \end{cases}$$

Problema 2 (3 puntos) Considérense las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calcúlese el determinante de la matriz $A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}$.

2. Calcúlese la matriz $M = A \cdot B$. ¿Existe M^{-1} ?
 Nota: C^T denota la matriz traspuesta de la matriz C .

(Junio 2016 - Opción A)

Solución:

1. $|A \cdot C \cdot C^T \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |C| \cdot |C^T| \cdot |A^{-1}| = |C|^2 = 4$
 ($|C| = |C^T|$ y $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$)

2.

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 11 \\ 37 & 26 \\ 33 & 21 \end{pmatrix}$$

No es una matriz cuadrada y, por tanto, $\nexists M^{-1}$.

Problema 3 (3 puntos) Una empresa desea disponer de dinero en efectivo en euros, dólares y libras esterlinas. El valor total entre las tres monedas ha de ser igual a 264000 euros. Se quiere que el valor del dinero disponible en euros sea el doble del valor del dinero en dólares, y que el valor del dinero en libras esterlinas sea la décima parte del dinero en euros.

Si se supone que una libra esterlina es igual a 1,5 euros y un dólar es igual a 1,1 euros, se pide determinar la cantidad de euros, dólares y libras esterlinas que la empresa ha de tener disponible.

(Septiembre 2000 - Opción A)

Solución:

LLamamos x a la cantidad de euros, y a la cantidad de dólares y z a la cantidad de libras esterlinas. Tenemos:

$$\begin{cases} x + 1,1y + 1,5z = 264000 \\ x = 2,2y \\ 1,5z = x/10 \end{cases} \implies \begin{cases} 10x + 11y + 15z = 2640000 \\ 10x - 22y = 0 \\ x - 15z = 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x = 165000 \text{ euros} \\ y = 75000 \text{ dolares} \\ z = 11000 \text{ libras} \end{cases}$$