Examen de Matemáticas 2^{o}Bachillerato(CN)

Febrero 2017

Problema 1 *(5 puntos).* Sean las rectas

$$r:\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+y=1 \end{cases} \quad , \quad s:\begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=3 \end{cases} ,$$

se pide:

a) Estudiar la posición de ambas rectas.

b) La distancia que las separa.

c) Encontrar una recta vertical a ambas que pase por el punto $P(1,0,2)$

d) Encontrar una recta vertical a ambas y que las corte.

e) Encontrar una recta que pasando por el punto $P(1,0,2)$ corte a ambas.

f) Encontrar los puntos de r que distan 5 unidades de P.

Solución:

$$r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{cases} \quad , \quad s:\begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(-1,2,0) \\ P_s(0,1,3) \end{cases} \quad , \quad \overrightarrow{P_rP_s}=(-1,1,3)$$

a)

$$\left[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}\right]=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

b)

$$|\overrightarrow{u_t}|=|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|=|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}|=|-(2,1,1)|=\sqrt{6}$$

$$d(r,s)=\frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\ u$$

c)

$$t:\begin{cases} \overrightarrow{u_t}=(2,1,1) \\ P(1,0,2) \end{cases} \Longrightarrow t:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=0+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}$$

d)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow y - z = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,2,0) \\ P_s(0,1,3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 2 & -1 & x \\ 1 & 2 & y-1 \\ 1 & 0 & z-3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x+y-5z+14 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} y - z = 0 \\ 2x + y - 5z + 14 = 0 \end{array} \right.$$

e)

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP} = (0,0,1) \\ \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} 0 & -1 & x-1 \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x+y-1 = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_sP} = (1,-1,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,2,0) \\ P_s(0,1,3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & x \\ -1 & 2 & y-1 \\ -1 & 0 & z-3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x+y+z-4 = 0$$

$$l : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ 2x + y + z - 4 = 0 \end{array} \right.$$

f)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. , \quad (x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = 25$$

$$(-\lambda)^2 + (\lambda)^2 + (\lambda - 2)^2 = 25 \Longrightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0 \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -2,06 \Longrightarrow P_1(3,06; -2,06; -2,06) \\ \lambda_2 = 3,4 \Longrightarrow P_2(-2,4; 3,4; 3,4) \end{array} \right.$$

Problema 2 *(2 puntos).* Se pide:

a) Dados los puntos $P_1(1,0,3)$ y $P_2(0,1,-3)$ encontrar el plano mediador.

b) Dados los planos $\pi_1 : x - 3y + 2z + 3 = 0$ y $\pi_2 : 3x + y - 2z - 1 = 0$ encontrar los planos bisectores.

Solución:

a)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+(z+3)^2}\Longrightarrow$$

$$\pi: x-y+6z=0$$

b)

$$\frac{|x-3y+2z+3|}{\sqrt{14}}=\frac{|3x+y-2z-1|}{\sqrt{14}}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\pi: x+2y-2z-2=0\\ \pi': 2x-y+1=0\end{array}\right.$$

Problema 3 *(3 puntos).* Dada la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$ se pide:

a) Calcular su centro y radio.

b) Encontrar la ecuación de la figura geométrica resultante de cortar esta esfera con el plano $z=2$.

c) Calcular la ecuación del plano tangente a esta esfera en el punto $P(3,-1,3)$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l}m=-2a=-2\Longrightarrow a=1\\ n=-2b=-2\Longrightarrow b=1\\ p=-2c=-4\Longrightarrow c=2\\ -3=1+1+4-r^2\end{array}\right.\Longrightarrow C(1,1,2),\ \ r=\sqrt{9}=3$$

b) $x^2+y^2-2x-2y-7=0$ Se trata de un disco circular paralelo al plano $z=0$ de centro en el punto $C'(1,1,2)$ y radio: $-7=1+1-r'^2\Longrightarrow r'=\sqrt{9}=3$

c)

$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_\pi}=\overrightarrow{CP}=(2,-2,1)\\ P(3,-1,3)\end{array}\right.\Longrightarrow 2x-2y+z+\lambda=0\Longrightarrow 6+2+3+\lambda=0\Longrightarrow$$

$$\lambda=-11\Longrightarrow \pi: 2x-2y+z-11=0$$