Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Febrero 2017

Problema 1 *(6 puntos).* Sean el plano $\pi : 2x - y + 2z - 1 = 0$ y la recta $r : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{1}$
se pide:

a) Encontrar una recta s perpendicular a π que pase por el punto $P(2,2,3)$.

b) Encontrar una recta t paralela a r que pase por P.

c) Encontrar un plano π' paralelo a π que contenga a P

d) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π. En el caso de que se corten, calcular el punto de corte y el ángulo que forman.

e) Encontrar un plano π'' perpendicular a π que contenga a r.

f) Encontrar la recta h que es proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

Solución:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,2), \quad r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r(1,-1,0) \end{array} \right.$$

a)

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,2) \\ P_s = P(2,2,3) \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{array} \right.$$

b)

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_t = P(2,2,3) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{array} \right.$$

c)

$$\pi' : 2x - y + 2z + \lambda = 0 \Longrightarrow 4 - 2 + 6 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -8$$

$$\pi' : 2x - y + 2z - 8 = 0 \Longrightarrow P \in \pi$$

d)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 2(1+\lambda) - (-1-\lambda) + 2(\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{2}{5}$$

Luego la recta r y el plano π se cortan en el punto $\left(\frac{3}{5},-\frac{3}{5},-\frac{2}{5}\right)$.

El ángulo que forman será $\beta = 90^{\circ} - \alpha$ donde α es el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,2)$ y $\overrightarrow{u_r} = (1,-1,1)$:

$$\sin\beta = \frac{\overrightarrow{u_\pi}\cdot\overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_\pi}|\cdot|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{5}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}} \Longrightarrow \beta = 74^{\circ}12'25''$$

e)

$$\pi'' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (2,-1,2) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r(1,-1,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi'' : \left|\begin{array}{rrr} 2 & 1 & x-1 \\ -1 & -1 & y+1 \\ 2 & 1 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow x-z-1=0$$

f)

$$h : \left\{\begin{array}{l} 2x-y+2z-1=0 \\ x-z-1=0 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(4 puntos).* Sea el punto $P(2,5,4)$. Se pide

a) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto del plano $\pi : x + 2y + z - 2 = 0$.

b) Encontrar el punto simétrico del punto P respecto de la recta $r : \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

Solución:

a) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in r$:

$$t : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,1) \\ P_t = P(2,5,4) \end{array}\right. \Longrightarrow t : \left\{\begin{array}{l} x = 2+\lambda \\ y = 5+2\lambda \\ z = 4+\lambda \end{array}\right.$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π:

$$(2+\lambda) + 2(5+2\lambda) + (4+\lambda) - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{7}{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2-7/3 = -1/3 \\ y = 5-14/3 = 1/3 \\ z = 4-7/3 = 5/3 \end{array}\right. \Longrightarrow P'\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':
$$\frac{P''+P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$
$$\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right) - (2,5,4) = \left(-\frac{8}{3}, -\frac{13}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

b) Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos un plano $\pi \perp r / P \in \pi$:
$$2x + y - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 4 + 5 - 4 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -5$$
$$\pi : 2x + y - z - 5 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de r con π:
$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,1,-1) \\ P_r(0,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{array} \right.$$
$$2(2\lambda) + (\lambda) - (2 - \lambda) - 5 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{7}{6}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 7/3 \\ y = 7/6 \\ z = 2 - 7/6 = 5/6 \end{array} \right. \Longrightarrow P'\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{6}\right)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':
$$\frac{P''+P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$
$$\left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right) - (2,5,4) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$