Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Diciembre 2016

Problema 1 Sean los vectores $\overrightarrow{u}=(1,m,3)$, $\overrightarrow{v}=(m,4,2)$ y $\overrightarrow{w}=(m,1,3)$. Calcular m de forma que los vectores sean linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 3 \\ m & 4 & 2 \\ m & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(m^2+9m-10)=0 \Longrightarrow m=1,\ m=-10$$

Si $m=1$ o $m=-10$ los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son linealmente dependientes.

Problema 2 Se pide:

1. Calcular m para que los vectores $\overrightarrow{u}=(2m,m,10)$ y $\overrightarrow{v}=(m,4,-3)$ sean perpendiculares.
2. Encontrar un vector perpendicular $\overrightarrow{u}=(-1,2,3)$ y a $\overrightarrow{v}=(0,2,1)$ que tenga módulo 7.
3. Decidir si los vectores $\overrightarrow{u}=(3,1,-1)$ y $\overrightarrow{v}=(1,-2,1)$ son perpendiculares.

Solución:

1. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=2m^2+4m-30=0 \Longrightarrow m=3$ y $m=-5$
2. $$\overrightarrow{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-4,1,-2)\Longrightarrow |\overrightarrow{w}|=\sqrt{21}$$
   $$\overrightarrow{t}=\frac{7}{\sqrt{21}}(-4,1,-2)=\left(-\frac{28\sqrt{21}}{21},\frac{\sqrt{21}}{3},-\frac{2\sqrt{21}}{3}\right)$$
3. $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=3-2-1=0\Longrightarrow \overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$

Problema 3 Sean los vectores $\overrightarrow{u}=(1,-3,2)$, $\overrightarrow{v}=(2,0,1)$ y $\overrightarrow{w}=(0,-1,4)$. Calcular:

1. Volumen de paralelepípedo que determinan.
2. Área de la base determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del paralelogramo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

3. Altura del paralelepípedo.

4. Volumen del tetraedro que determinan.

5. Área de la base del tetraedro determinada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, y la altura del triángulo sobre el vector $\overrightarrow{v}$.

6. Altura del tetredro.

Solución:

1.
$$V_p = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 21\ u^3$$

2.
$$S_p = |\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}| = |(-3, 3, 6)| = 3\sqrt{6}\ u^2$$

$$S_p = |\overrightarrow{v}| \cdot h_p \Longrightarrow h_p = 3\sqrt{\frac{6}{5}}\ u$$

3.
$$V_p = S_p \cdot H_p \Longrightarrow H_p = \frac{7\sqrt{6}}{6}\ u$$

4.
$$V_t = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\ u^3$$

5.
$$S_t = \frac{3\sqrt{6}}{2}\ u^3,\ \ h_t = h_p = 3\sqrt{\frac{6}{5}}\ u$$

6.
$$H_t = H_p = \frac{7\sqrt{6}}{6}\ u$$

Problema 4 Sean los puntos $A(-1, 0, 2)$, $B(4, -3, -2)$ y $C(7, 3, 6)$ tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Se pide:

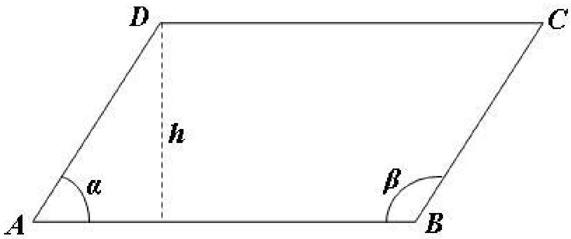
1. Encontrar el 4º vértice D.

2. Calcular la longitud de sus lados.

3. Calcular sus ángulos y su centro.

4. Calcular el punto simétrico de A respecto de C.

5. Dividir el segmento $\overline{AC}$ en tres partes iguales.



Solución

1. $D = A + \overrightarrow{BC} = (-1, 0, 2) + (3, 6, 8) = (2, 6, 10)$.
2. $|\overrightarrow{AB}| = |(5, -3, -4)| = 5\sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |(3, 6, 8)| = \sqrt{109}$
3. $$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-35}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{109}} \Longrightarrow \alpha = 118^{o}18'3'' \text{ y } \beta = 61^{o}41'57''$$

   El centro es $M\left(3, \dfrac{3}{2}, 4\right)$
4. $C = \dfrac{A + A'}{2} \Longrightarrow A' = 2C - A = (15, 6, 10)$
5. $$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{8}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)$$
   $$A_1 = A + \overrightarrow{u} = (-1, 0, 2) + \left(\frac{8}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, 1, \frac{10}{3}\right)$$
   $$A_2 = A_1 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{5}{3}, 1, \frac{10}{3}\right) + \left(\frac{8}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{13}{3}, 2, \frac{14}{3}\right)$$
   $$C = A_3 = A_2 + \overrightarrow{u} = \left(\frac{13}{3}, 2, \frac{14}{3}\right) + \left(\frac{8}{3}, 1, \frac{4}{3}\right) = (7, 3, 6)$$