Examen de Matemáticas II (Junio 2012)
Simulacro de Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar el rango de A en función de los valores de k.

b) (0,75 puntos) Para $k = 2$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = B$.

c) (0,75 puntos) Para $k = 1$, hallar, si existe, la solución del sistema $AX = C$.

Solución:

a)
$$|A| = 4k(k^2 - 1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \;\; k = \pm 1$$

- Si $k \neq 0$ o $k \neq \pm 1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$
- Si $k = 0$:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$
- Si $k = 1$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$
- Si $k = -1$:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

b) Si $k = 2$:

$$AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/2 & 1/3 \\ 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/12 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}$$

c) Si $k = 1$ el sistema $AX = C$ tiene como matriz asociada:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right), \text{ Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A})$ $\Longrightarrow$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

Problema 2 *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar el valor de a para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) (1 punto). Hallar los valores de a para que el tetraedro con vértices en P_1, P_2, P_3, P_4 tenga volumen igual a 7.

c) (1 punto). Hallar la ecuación del plano cuyos puntos equidistan de P_1 y de P_3.

Solución:

a) Tenemos $\overrightarrow{P_1P_2} = (a - 1, -1, 1)$, $\overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 5)$, $\overrightarrow{P_1P_4} = (1, -3, 3)$:

$$\begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 7(3a - 4) = 0 \Longrightarrow a = \frac{4}{3}$$

b)

$$7 = \frac{1}{6}| \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} | \Longrightarrow |3a - 4| = 6 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 10/3 \\ a = -2/3 \end{array} \right.$$

c)

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2+(z-4)^2}\Longrightarrow$$

$$4y+10z-31=0$$

Problema 3 *(2 puntos)* Hallar a, b, c de modo que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ alcance en $x=1$ un máximo relativo de valor 2, y tenga en $x=3$ un punto de inflexión.

Solución:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b,\ \ f''(x)=6x+2a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=2\Longrightarrow a+b+c=1\\ f'(1)=0\Longrightarrow 2a+b=-3\\ f''(3)=0\Longrightarrow a=-9 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} a=-9\\ b=15\\ c=-5 \end{array}\right.$$

$$f(x)=x^3-9x^2+15x-5$$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx$
- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx$

Solución:

- (1 punto). $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x\,dx=-\frac{2}{5}(e^{2\pi}+1)$

$$I=\int e^{2x}\cos x\,dx=\left[\begin{array}{c} u=\cos x\Longrightarrow du=-\sin x\\ dv=e^{2x}\,dx\Longrightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right]=\frac{e^{2x}\cos x}{2}+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx=$$

$$\left[\begin{array}{c} u=\sin x\Longrightarrow du=\cos x\\ dv=e^{2x}\,dx\Longrightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right]=\frac{e^{2x}\cos x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}\sin x}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx\right)$$

$$I=\frac{e^{2x}\cos x}{2}+\frac{1}{2}\frac{e^{2x}\sin x}{2}-\frac{1}{4}I\Longrightarrow I+\frac{1}{4}I=\frac{(2\cos x+\sin x)e^{2x}}{4}\Longrightarrow$$

$$\int e^{2x}\cos x\,dx=\frac{(2\cos x+\sin x)e^{2x}}{5}$$

- $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x}\,dx=-\frac{1}{2}\arctan(\cos 2x)\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$

Examen de Matemáticas II (Junio 2012)
Simulacro de Selectividad-Opción B
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}}, \;\; g(x) = (lnx)^x, \;\; h(x) = sen(\pi - x)$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

b) (1 punto). Calcular $g'(e)$.

c) (1 punto). Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

Solución:

a) $Dom(f) = (\sqrt{3}, \infty)$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(x+1)}{\sqrt{x^2 - 3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x+1}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}} = 3$$

b)

$$g'(x) = (\ln x)^x \left(\ln(\ln(x) + \frac{1}{\ln x}\right) \Longrightarrow g'(e) = 1$$

c) $h(x)sen(\pi - x) = 0 \Longrightarrow \pi - x = k\pi \Longrightarrow x = (1-k)\pi$,, el único punto de corte en este intervalo es en $x = \pi$.

$$h'(x) = -\cos(\pi - x) = 0 \Longrightarrow \pi - x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = \pi\left(\frac{1}{2} - k\right)$$

Luego $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las rectas

$$r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}, \quad r_2 \equiv \left\{\begin{array}{c} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar su posición relativa.

b) (2 puntos). Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2.

Solución:

$$r_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (3, -5, 2) \\ P_{r_1}(2, 1, 0) \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (-1, 1, 0) \\ P_{r_2}(-1, 3, 5) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (-3, 2, 5)$$

a)

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{|-8|}{2\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = |(-2, -2, -2)| = 2\sqrt{3}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar el rango de la matriz B en función de a.

b) (1 punto). Para $a = 0$, calcular la matriz X que verifica $AX = B$.

Solución:

a)

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 2-a & 3+a \end{vmatrix} = 40(1-a) = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Luego si $a \neq 1 \Longrightarrow \text{Rango}(B) = 3$. Si $a = 1$:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|B_1| = |B_2| = |B_3| = |B_4| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(B) = 2$$

b) Si $a=0$:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX=B \Longrightarrow X=A^{-1}B:$$

$$X=\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} F_1-F_4 \\ F_2-F_4 \\ F_3-F_4 \\ F_4 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(x-1)(y-1)(z-1)$$