Examen de Matemáticas II (Septiembre 2017)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} xe^{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$
donde ln significa logaritmo neperiano, se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} f(x)$.

c) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:
$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} xe^{2x} = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ y $f(0) = 0 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$f'(x) = \begin{cases} (1+2x)e^{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$; $f'(0^-) = 1$ y $f'(0^+) = 1 \Longrightarrow f$ es derivable en $x = 0$.

b) $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0$

$\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} xe^{2x} = \lim\limits_{t\longrightarrow \infty} -te^{-2t} = \lim\limits_{t\longrightarrow \infty} \dfrac{-t}{e^{2t}} = \left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{t\longrightarrow \infty} \dfrac{-1}{2e^{2t}} = 0$

c)

$$\int xe^{2x}\,dx = \left[\begin{array}{ccc} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & \Longrightarrow & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right] = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

$$\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x-1)e^{2x}}{4} + C$$

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \frac{3-e^2}{4e^2} = -0,148$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{array}\right.$ y $r_2 \equiv \left\{\begin{array}{l} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{array}\right.$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de r_1 y r_2.

b) (1 punto) Calcular la distancia entre las dos rectas.

c) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a r_1 y al punto $P(1, 2, 3)$.

Solución:

a) $r_1 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 4, 2) \\ P_{r_1}(0, -1, 0) \end{array}\right. , \quad r_2 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_{r_2}} = (-1, -1, 1) \\ P_{r_2}(1, 0, 0) \end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (1, 1, 0)$

$$[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow r_1 \text{ y } r_2 \text{ se cruzan}$$

b)

$$d(r_1, r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{|3|}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\ u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = |\left|\begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right|| = |3(2, -1, 1)| = 3\sqrt{6}$$

c)

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{P_{r_1}P} = (1, 3, 3) \\ \overrightarrow{u_{r_1}} = (1, 4, 2) \\ P_{r_1}(0, -1, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi : \left|\begin{array}{ccc} x & y+1 & z \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \pi : 6x - y - z - 1 = 0$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 25 \\ x + 0,75y + 0,60z = 0,72 \cdot 25 \\ 0,15y + 0,22z = 0,16 \cdot 25 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + y + z = 25 \\ 100x + 75y + 60z = 1800 \\ 15y + 22z = 400 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 3 \\ y = 12 \\ z = 10 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatorio, con probabilidades tales que $p(A) = \frac{4}{9}$, $p(B) = \frac{1}{2}$ y $p(A \cup B) = \frac{2}{3}$ se pide:

a) (1 punto) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) (1 punto) Calcular $p(\overline{A}|B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.

Solución:

$$P(A) = \frac{4}{9} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

a) $P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{18}$

Luego $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Longrightarrow$ los sucesos A y B no son independientes.

b) $P(\overline{A}|B) = \dfrac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{5}{18}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{4}{9}$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2017) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$.

b) (1,5 puntos) Determinar el rango de las matrices $A - I$, $A^2 - I$ y $A^3 - I$.

c) (1 punto) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

Solución:

a) $B = (A-I)(2I+2A) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A-I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A-I|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A-I)=2$.

$$A^2-I=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Longrightarrow \text{Rango}(A^2-I)=1.$$

$A^3-I=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $|A^3-I|=0$ y $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-7\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A-I)=2$.

c) $A^2=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$A^n=\begin{cases} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es par} \\ \\ \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \Longrightarrow A^6=\begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A^6)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

a) (1 punto) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x=0$.

b) (1 punto) Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

c) (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

Solución:

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{x^2+1}\Longrightarrow f'(x)=-\frac{e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

a) $b = f(0) = 1$ y $m = f'(0) = -1 \Longrightarrow y = -x + 1$

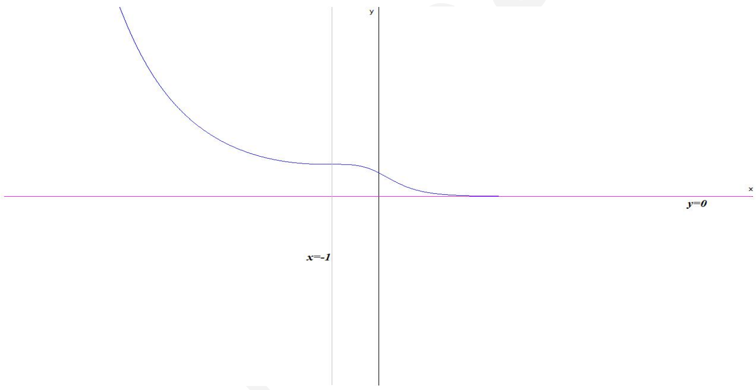
b)
- Verticales: No hay, el denominador $f(x)$ no se anula.
- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = \lim_{t\longrightarrow +\infty} \frac{e^{t}}{t^2+1} = \infty$$

Luego no hay asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$ pero si la hay cuando $x \longrightarrow +\infty$ y es $y = 0$.

c) $f'(x) = -\dfrac{e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1$, en este punto la función pasa de decrecer a decrecer y en el resto de puntos la función es siempre decreciente ($f'(x) < 0$ en $\mathbb{R} - \{-1\}$), luego no tiene extremos relativos.



Problema 3 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3,2,0)$ y $P_2(7,0,2)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto $Q(3,5,-3)$ a la recta r.

b) (1 punto) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por el punto Q.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,-1,1) \\ P_r(3,2,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

a) $\overrightarrow{P_rQ} = (0, 3, -3)$

$$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}\ u$$

$$|\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{u_r}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}| = |(0, -6, -6)| = 6\sqrt{2}$$

b) Calculamos $\pi \perp r \Longrightarrow \pi : 2x - y + z + \lambda = 0$, imponemos que $Q \in \pi \Longrightarrow 6 - 5 - 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow \pi : 2x - y + z + 2 = 0$.

Calculamos el punto de corte de r con π: $2(3 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow$ el punto de corte será: $Q'(1, 3, -1)$

Problema 4 *(2 puntos)* Se considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3, -1)$, $B(3, 1, 0)$ y $C(2, 5, 1)$ y se pide

a) (1 punto) Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

b) (1 punto) Obtener las medidas de sus tres ángulos.

Solución:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -2, 1),\quad \overrightarrow{AC} = (1, 2, 2),\quad \overrightarrow{BC} = (-1, 4, 1)$$

a) $|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 3$ y $|\overrightarrow{BC}| = 3\sqrt{2}$. Como tiene dos lados iguales es un triángulo isósceles.

b) $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{2 - 4 + 2}{9} = 0 \Longrightarrow \alpha = 90^{\text{o}}$, luego se trata de un triángulo rectángulo e isósceles y los otros dos ángulos tienen que ser iguales $\beta = \gamma \Longrightarrow \beta = \gamma = 45^{\text{o}}$.