Examen de Matemáticas II-Coincidente (Septiembre 2017)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ xe^x + 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ se pide:

a) (1 punto) Estudiar la continuidad de f en todo $\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Obtener la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = -\pi$

c) (1 punto) Calcular la integral $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad en $x = 0$:
$\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{\sin(2x)}{x} = 2,\ \lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^-} (xe^x + 2) = 2$
y $f(0) = 2 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 0 \Longrightarrow f$ continua en $\mathbb{R}$.

b) Si $x = -\pi$ tenemos: $f(-\pi) = 0$, en esa rama $f'(x) = \dfrac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{x^2} \Longrightarrow$ $m = f'(-\pi) = -\dfrac{2}{\pi}$. Luego la ecuación de la recta tangente es:

$$y = -\frac{2}{\pi}(x + \pi)$$

c) En el intervalo $[1, 2]$ es $f(x) = xe^x + 2$:

$$F(x) = \int (xe^x+2)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = e^x dx & \Longrightarrow & v = e^x \end{array} \right] = xe^x+2x-\int e^x\,dx =$$

$$xe^x + 2x - e^x = e^x(x-1) + 2x$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = e^2 + 2 = 9,389$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y & = & 1 \\ & ty+ & z = & 0 \\ x+ & (1+t)y+ & tz = & t+1 \end{array} \right.$, se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo en función del parámetro t.

b) (0,5 puntos) Resolverlo para $t = 0$.

c) (0,5 puntos) Resolverlo para $t = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 & 0 \\ 1 & 1+t & t & t+1 \end{array} \right) \quad |A| = t^2 - t = 0 \Longrightarrow t = 0, \quad t = 1$$

Si $t \neq 0$ y $t \neq 1 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $t = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right) = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_1 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) =$$

$$\left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array} \right] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Longrightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $t = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right); F_3 = F_1 \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $t = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

c) Si $t = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \end{array} \right.$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1 \equiv 2x + y - z = 1 \;\text{ y }\; \pi_2 \equiv x + 2y + z = 3$$

, se pide:

a) (1 punto) Calcular el plano o planos formados por los puntos que equidistan de π_1 y π_2.

b) (1 punto) Calcular la recta paralela a π_1, paralela a π_2 y que pasa por el punto $A(1,1,1)$.

Solución:

a) $P(x,y,z)$ tales que $d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2)$:

$$\frac{|2x+y-z-1|}{\sqrt{6}} = \frac{|x+2y+z-3|}{\sqrt{6}} \Longrightarrow |2x+y-z-1| = |x+2y+z-3| \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+y-z-1 = x+2y+z-3 \Longrightarrow \pi_1' : x-y-2z+2=0 \\ 2x+y-z-1 = -x-2y-z+3 \Longrightarrow \pi_2' : 3x+3y-4=0 \end{array} \right.$$

b) La recta paralela a π_1 y π_2 tiene que ser paralela a la intersección de ambos planos.

$$\overrightarrow{u_r} = |\overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}}| = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3,-3,3) = 3(1,-1,1)$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-1,1) \\ P_r = A(1,-1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array} \right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Una empresa fabrica móviles de tres marcas distintas: A, N y M. El 20 % de los móviles fabricados son de la marca A y el 40 % de la marca N. Se decide instalar un software oculto que permita espiar a los usuarios de estos móviles. El software espía se instala en el 15 % de los móviles de la marca A, en un 10 % de la marca N y en un 12 % de los móviles de la marca M. Se pide:

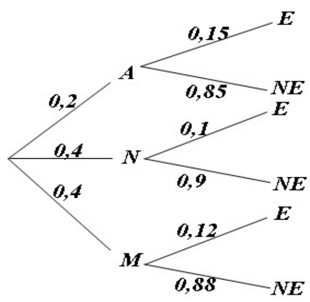
a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que una persona que compra uno de estos móviles tenga instalado el software espía.

b) (1 punto) Si el móvil de una persona tiene instalado el software espía, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.

Solución:

a) $P(E) = P(A)P(E|A) + P(N)P(E|N) + P(M)P(E|M) = 0,2 \cdot 0,15 + 0,4 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,12 = 0,118$

b) $P(A|E) = \dfrac{P(E|A)P(A)}{P(E)} = \dfrac{0,15 \cdot 0,2}{0,118} = 0,254$



Examen de Matemáticas II-Coincidente (Septiembre 2017) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dados los puntos $P_1(1,1,3)$, $P_2(0,0,3)$, $P_3(4,-3,1)$ y $O(0,0,0)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el plano π que contiene los puntos P_1, P_2, P_3.

b) (1 punto) Hallar el punto simétrico de O respecto del plano $\pi' \equiv x+y-z+3=0$.

c) (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro con vértices O, P_1, P_2, P_3.

Solución:

a) $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{P_2P_3} = (4,-3,-2) \\ \overrightarrow{P_2P_1} = (1,1,0) \\ P_2(0,0,3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$2x - 2y + 7z - 21 = 0$$

b) Seguimos el siguiente proceso:

- Calculamos $r \perp \pi' / O \in r \Longrightarrow \overrightarrow{r} = (1,1,-1)$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte de r con π':

$$\lambda + \lambda + \lambda + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \Longrightarrow O'(-1,-1,1)$$

- $\dfrac{O+O''}{2} = O' \Longrightarrow O'' = 2O' - O = (-2,-2,2)$

c) $\overrightarrow{OP_1} = (1,1,3)$, $\overrightarrow{OP_2} = (0,0,3)$ y $\overrightarrow{OP_3} = (4,-3,1)$:

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\ u^3$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix}$, se considera la matriz B formada por las tres últimas columnas de A y se pide:

a) (1 punto) Estudiar para qué valores del parámetro real a la matriz B es invertible.

b) (1 punto) Obtener el rango de A en función de los valores del parámetro real a.

c) (1 punto) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, en el caso $a = 0$.

Solución:

a) $|A| = 0 \Longrightarrow \nexists B^{-1}\ \forall a \in \mathbb{R}$

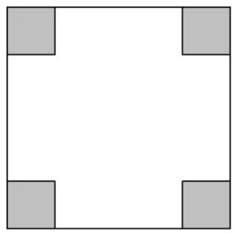
b) Por Gauss: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 1 & 0 & 5 & 2a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 0 & 1 & -2 & a \\ 0 & 2 & -4 & 2a \end{pmatrix} =$ $\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & a \\ 0 & 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2\ \forall a \in \mathbb{R}$.

c) Con $a = 0$ se trata de un sistema compatible indeterminado:

$$\begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -x + 7y = 1 \\ 5y = 1 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2/5 \\ y = 1/5 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se dispone de una plancha de cartón cuadrada cuyo lado mide 1,2 metros. Determínense las dimensiones de la caja (sin tapa) de volumen máximo que se puede construir, recortando un cuadrado igual a cada esquina de la plancha y doblando adecuadamente para unir las aristas resultantes de los cortes.



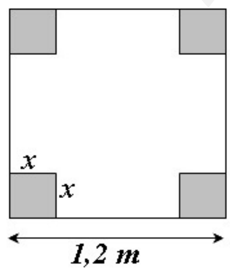
Solución:

$$V(x) = (1,2-2x)^2x = (1,44+4x^2-4,8x)x = 4x^3-4,8x^2+1,44x$$

$$V'(x) = 12x^2-9,6x+1,44 = 0 \Longrightarrow x = 0,2, \quad x = 0,6$$

$$V''(x) = 24x-9,6 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} V''(0,2) = -4,8 < 0 \Longrightarrow x = 0,2 \text{ máximo} \\ V''(0,6) = 4,8 > 0 \Longrightarrow x = 0,6 \text{ mínimo} \end{array} \right.$$

El volumen máximo sería $V(0,2) = 0,128$



Problema 4 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$, calcúlese el área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = 1-x$.

Solución:

$$\frac{1-x^2}{x^2+1} = 1-x \Longrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\; x = 1$$

$$S_1 = \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{x^2+1} - 1 + x \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + 2\arctan x \Big]_0^1 = \frac{\pi-3}{12}$$

$$S = |S_1| = \left| \frac{\pi-3}{12} \right| = \frac{\pi-3}{12} \; u^2$$