# Examen de Matemáticas II (Modelo 2017)
## Selectividad-Opción A
**Tiempo: 90 minutos**

---

**Problema 1** *(3 puntos)* Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = 2 \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos) Comprobar que se cruzan y calcular la distancia entre ellas.

b) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a $r$ y es paralelo a $s$.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forma la recta $r$ con el plano $y = 0$.

**Solución:**

a) $r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (5,1,2) \\ P_r(2,3,-1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1,-1,0) \\ P_s(1,3,2) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1,0,3)$

$$[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -20 \neq 0 \Longrightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}| = |(2,2,-6)| = 2\sqrt{11}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{20}{2\sqrt{11}} = \frac{10\sqrt{11}}{11} \ u$$

b) $\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (5,1,2) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,0) \\ P_r(2,3,-1) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z+1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$

$$\pi : x + y - 3z - 8 = 0$$

c) $\pi' : y = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi'}} = (0,1,0)$ y $\overrightarrow{u_r} = (5,1,2)$:

$$\sin\alpha = \frac{\overrightarrow{u_{\pi'}} \cdot \overrightarrow{u_r}}{|\overrightarrow{u_{\pi'}}||\overrightarrow{u_r}|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \Longrightarrow \alpha = 10^{\circ}31'11''$$

**Problema 2** *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m\\ 2 & 4 & 1\\ m & 2 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Determinar el rango de $B$ en función de los valores de $m$.

b) (1,5 puntos) Calcular la matriz inversa de $A$ y comprobar que verifica $A^{-1}=\frac{1}{5}(A^2+3C)$.

**Solución:**

a) $|B|=-4m^2+6m-2=0 \Longrightarrow m=1,\ m=1/2$ luego si $m\neq 1$ y $m\neq 1/2 \Longrightarrow |B|\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(B)=3$.

Si $m=1$: $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $|B|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(B)=2$.

Si $m=1/2$: $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2\\ 2 & 4 & 1\\ 1/2 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $|B|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 1/2 & 2\end{vmatrix}=1\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(B)=2$.

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2/5 & 4/5 & 1/5\\ -1/5 & 3/5 & 2/5\\ 2/5 & -1/5 & 1/5\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

$$A^2-3C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4\\ 2 & -3 & -1\\ -1 & 5 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3\\ -3 & 6 & 3\\ 3 & -6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Luego $A^{-1}=\dfrac{1}{5}(A^2+3C)$.

**Problema 3** *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

**Solución:**
Sea $x$ el aumento en euros de las papeletas:

$$f(x)=(2+x)(5000-500x)-600=-500x^2+4000x+9400$$

$$f'(x) = -1000x + 4000 = 0 \Longrightarrow x = 4$$

$$f''(x) = -1000 \Longrightarrow f''(4) = -1000 < 0 \Longrightarrow x = 4 \text{ máximo}$$

Hay que aumentar el precio en 4 euros (hay que vender a 6 euros) y el beneficio sería $f(4) = 17400$ euros.

**Problema 4** *(2 puntos)* Calcular el área comprendida entre las curva $y = (x-1)e^x$ y la recta $y = x - 1$.

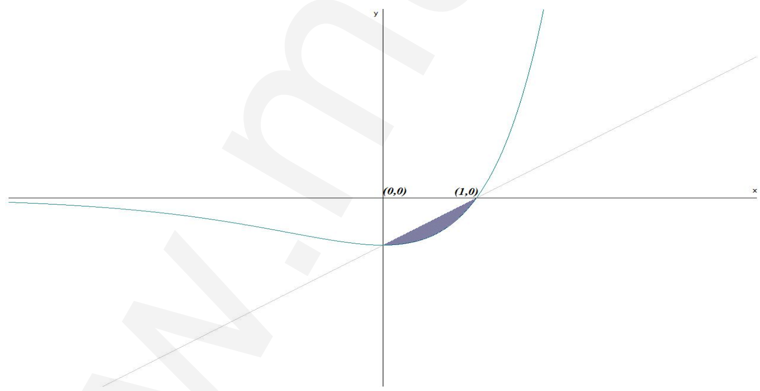
**Solución:**
$f(x) = g(x) \Longrightarrow (x-1)e^x = x - 1 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$.

$$F(x) = \int ((x-1)e^x - x + 1)\, dx = \left[ \begin{array}{c} u = x - 1 \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x \end{array} \right] =$$

$$-\frac{x^2}{2} + x + (x-1)e^x - \int e^x\, dx = -\frac{x^2}{2} + x + (x-2)e^x$$

$$S_1 = \int_0^1 ((x-1)e^x - x + 1)\, dx = F(1) - F(0) = \frac{5-2e}{2}$$

$$S = |S_1| = \frac{2e-5}{2} \simeq 0,218\ u^2$$




# Examen de Matemáticas II (Modelo 2017) Selectividad-Opción B
**Tiempo: 90 minutos**

**Problema 1** *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{-x}$ y se pide:

a) (0,5 puntos) Determinar el dominio y las asíntotas de $f$.

b) (1,5 puntos) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar sus extremos relativos.

c) (1 punto) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

**Solución:**

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, Asíntotas:

- Verticales: No hay.
- Horizontales: $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{x}{e^x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

b) $f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $f''(x) = e^{-x}(x-2) \Longrightarrow f''(1) = -e^{-1} < 0 \Longrightarrow$ en $x = 1$ la función presenta un máximo.

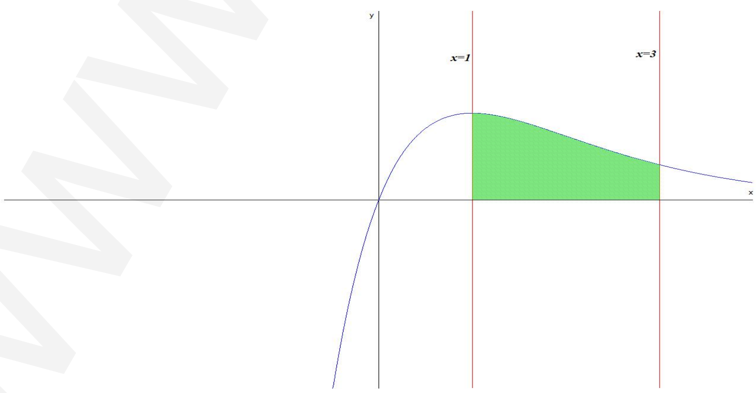
c) La función no corta al eje de abcisas en el intervalo $[1, 3]$ y, por tanto, los límites de integración son 1 y 3.

$$F(x) = \int xe^{-x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right] =$$

$$-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x+1)$$

$$S_1 = \int_1^3 xe^{-x}\,dx = F(3) - F(1) = -\frac{4}{e^3} + \frac{2}{e} = 0,54$$

$$S = |S_1| = \frac{2e^2 - 4}{e^3}\ u^2 \simeq 0054\ u^2$$



**Problema 2** *(3 puntos)* Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(0,0,-3)$, y $P(1,1,1)$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por $A$, $B$ y $P$.

c) (1 punto) Hallar la distancia del punto $P$ a la recta que pasa por $A$ y $B$.

**Solución:**

a)

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = (2,1,4) \\ \overrightarrow{BP} = (1,1,4) \\ B(0,0,-3) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} x & y & z+3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 4y - z - 3 = 0$$

b)

$$S_T = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BP}| = \frac{1}{2}| \left| \begin{array}{ccc} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right| | = \frac{1}{2}|(0,-4,1)| = \frac{\sqrt{17}}{2}\ u^2$$

c)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{BA} = (2,1,4) \\ P_r = B(0,0,-3) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_rP} = \overrightarrow{BP} = (1,1,4)$$

$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{P_rP}|}{|\overrightarrow{u_r}|} = \sqrt{\frac{17}{21}}\ u$$

**Problema 3** *(2 puntos)* A un florista le han encargado preparar 5 ramos iguales para cinco eventos. El precio total acordado es de 610 euros. Ha decidido emplear rosas, tulipanes y lilas. Cada ramo llevará un total de 24 flores y el número de rosas empleado doblará al número total de flores de otras especies. ¿Cuál es el número de flores de cada tipo que usará en cada ramo sabiendo que cada rosa cuesta 6 euros, cada tulipán cuesta 4 y cada lila 3?

**Solución:**

Sea $x$ el número de rosas, $y$ el número de tulipanes y $z$ el número de lilas de un ramo, respectivamente.

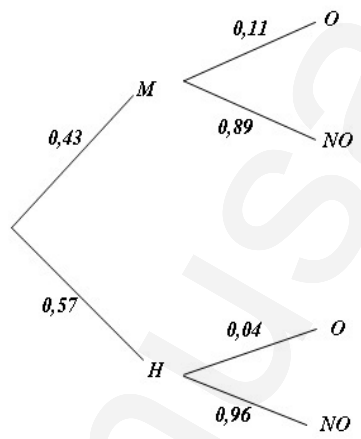
$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 24 \\ x = 2(y+z) \\ 6x + 4y + 3z = \frac{610}{5} = 122 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 24 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 6x + 4y + 3z = 122 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 16 \\ y = 2 \\ z = 6 \end{array} \right.$$

**Problema 4** *(2 puntos)* En una población de cierta especie de cérvidos, el 43 % de los adultos son machos y el 57 % hembras. Se sabe que el 11 % de los machos adultos y el 4 % de las hembras adultas sufre alguna afección ocular. Se supone que se captura al azar un ejemplar adulto y se pide:

a) (1 punto) Determinar la probabilidad de que tenga alguna afección ocular.

b) (1 punto) Si el ejemplar capturado padeciere una afección ocular ¿cuál sería la probabilidad de que fuera un macho?

**Solución:**




a) $P(O) = P(M)P(O|M) + P(H)P(O|H) = 0,11 \cdot 0,43 + 0,04 \cdot 0,57 = 0,0701$

b) $P(M|O) = \dfrac{P(O|M)P(M)}{P(O)} = \dfrac{0,11 \cdot 0,43}{0,0701} = 0,6748$