# Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)
**Abril 2017**

---

**Problema 1** Dada la función:

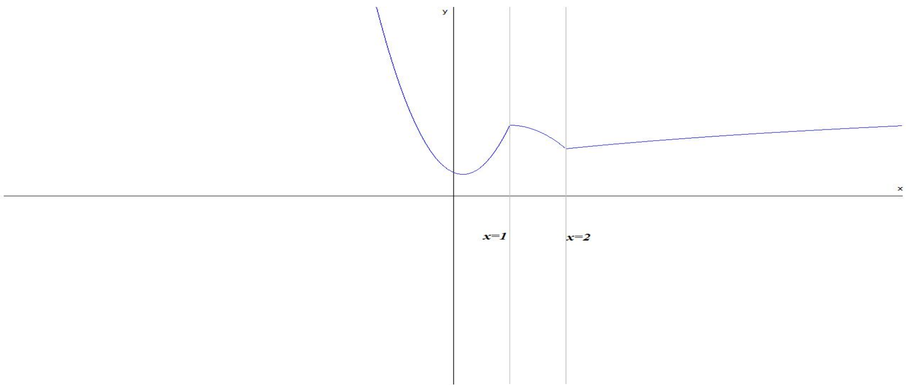
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 2x + 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \\ \frac{2\ln(3+x)}{\ln 5} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

**Solución:**




a) Continuidad en $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (3x^2 - x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (-x^2 + 2x + 2) = 3$$

$$f(1) = 3$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.
Continuidad en $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (-x^2 + 2x + 2) = 2$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{2\ln(3+x)}{\ln 5} = 2$$

$$f(2) = 3$$

Luego $f(x)$ es discontinua evitable en $x = 2$, hay un agujero.

b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 6x-1 & \text{si} & x<1 \\ -2x+2 & \text{si} & 1<x<2 \\ \frac{2}{(x+3)\ln 5} & \text{si} & x>2 \end{array} \right.$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = 5 \neq f'(1^+) = 0$ luego no es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 2$: No puede ser derivable ya que no es continua.
En resumen, la función es continua en $R-\{2\}$ y derivable en $R-\{1,2\}$.

**Problema 2** Calcular $a$ y $b$ para que la siguiente función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 3ax^2 - bx + 3 & \text{si} & x<1 \\ bx^2 - ax + 1 & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

**Solución:**

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (3ax^2 - bx + 3) = 3a - b + 3$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (bx^2 - ax + 1) = b - a + 1$$

$$3a - b + 3 = b - a + 1 \Longrightarrow 2a - b = -1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 6ax - b & \text{si} & x<1 \\ 2bx - a & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

$$f'(1^-) = 6a - b;\ \ f'(1^+) = 2b - a \Longrightarrow 6a - b = 2b - a \Longrightarrow 7a - 3b = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2a - b = -1 \\ 7a - 3b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 7 \end{array} \right.$$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 9x^2 - 7x + 3 & \text{si} & x<1 \\ 7x^2 - 3x + 1 & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right. \Longrightarrow f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 18x - 7 & \text{si} & x<1 \\ 14x - 3 & \text{si} & x \geq 1 \end{array} \right.$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c \in [0,2]/f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{23-3}{2} = 10$$

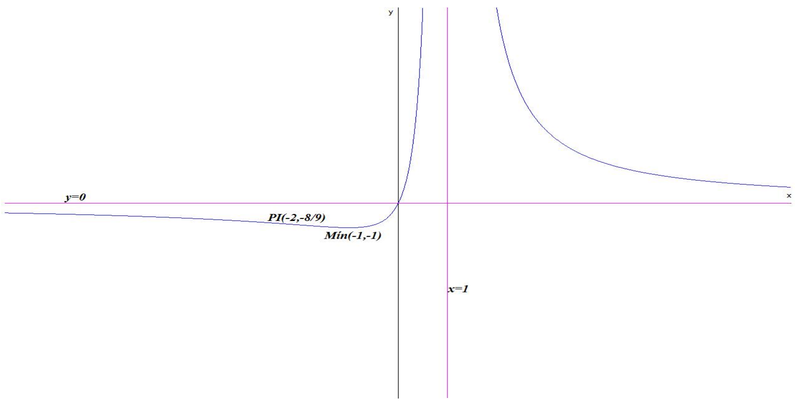
Si $c < 1$ : $f'(c) = 18c - 7 = 10 \Longrightarrow c = \frac{17}{18}$ solución válida. Si $c \geq 1$ : $f'(c) = 14c - 3 = 10 \Longrightarrow c = \frac{13}{14}$ solución no válida.

**Problema 3** Dada la función $f(x) = \dfrac{4x}{(x-1)^2}$, se pide:

a) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.

b) Estudiar sus asíntotas, su monotonía y su curvatura.

**Solución:**




a) $f'(x) = -\dfrac{4(x+1)}{(x-1)^3}$

$$b = f(2) = 8, \;\; m = f'(2) = -12$$

$$y - 8 = -12(x-2)$$

b) Tenemos

- Dom$(f) = R$, es una función sin simetría, con corte en $(0,0)$, es negativa en $(-\infty, 0)$ y positiva en $(0,1) \cup (1,\infty)$.
- Asíntotas:
  Verticales: $x = 1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
  Horizontales: $y = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{4x}{(x-1)^2} = 0$ y por tanto no hay oblicuas.

- Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{4(x+1)}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = -1$

| | $(-\infty,-1)$ | $(-1,1)$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $f(x)$ | decreciente | creciente | decreciente |

La función es creciente en el intervalo $(-1,1)$.
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$.
La función tiene un mínimo en el punto $(-1,-1)$.

- $f''(x) = \dfrac{8(x+2)}{(x-1)^4} = 0 \Longrightarrow x = -2$

| | $(-\infty,-2)$ | $(-2,+\infty)$ |
|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | convexa | cóncava |

Cóncava: $(-2,1)\cup(1,+\infty)$, Convexa: $(-\infty,-2)$ y con punto de inflexión en $(-2,-8/9)$.

**Problema 4** Dada la función $f(x) = x^3 - 3ax^2 - bx + c$, se pide:

a) Hallar los valores de $a$, $b$ y $c$ para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abcisa $x = 3$, un punto de inflexión en el de abcisa $x = 2$ y corte el eje $OY$ en el punto de ordenada $y = 1$.

b) ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

**Solución:**

a)

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 - bx + c, \quad f'(x) = 3x^2 - 6ax - b, \quad f''(x) = 6x - 6a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 1 \Longrightarrow c = 1 \\ f'(3) = 0 \Longrightarrow 27 - 18a - b = 0 \\ f''(2) = 0 \Longrightarrow 12 - 6a = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 1$$

b)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 9x + 1, \quad f'(x) = 3x^2 - 12x - 9, \quad f''(x) = 6x - 12$$

$f''(3) = 6 > 0 \Longrightarrow$ en $x = 3$ hay un mínimo.

**Problema 5** Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx$

**Solución:**

a) $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\,dx = e^{2x}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)+C$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx = x + 10\ln|x-3| - 5\ln|x-2| + C$