Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Abril 2017

Problema 1 Dada la función:

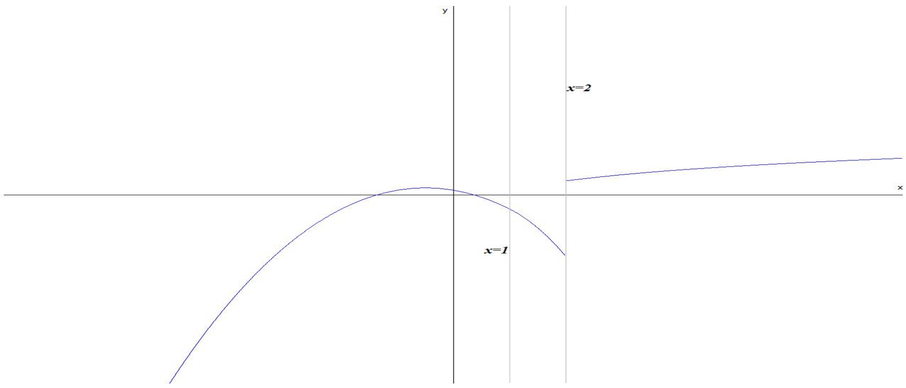
$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -4x^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \frac{3\ln(1+x^2)}{\ln 5} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

b) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ en $x = 1$ y en $x = 2$.

Solución:



a) Continuidad en $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} (-2x^2 - 2x + 1) = -3$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} (-4x^2 + 2x - 1) = -3$$

$$f(1) = -3$$

Luego $f(x)$ es continua en $x = 1$.
Continuidad en $x = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^-} (-4x^2 + 2x - 1) = -13$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2^+} \frac{3\ln(1+x^2)}{\ln 5} = 3$$

Luego $f(x)$ es discontinua no evitable en $x = 2$, hay un salto.

b) Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -4x-2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -8x+2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \frac{6x}{(x^2+1)\ln 5} & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -6 \neq f'(1^+) = -6$ luego si es derivable en $x = 1$.
Derivabilidad en $x = 2$: No puede ser derivable ya que no es continua.
En resumen, la función es continua en $R - \{2\}$ y derivable en $R - \{2\}$.

Problema 2 Calcular a y b para que la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 2ax^2 - bx + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ bx^2 + ax + 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y encontrar el punto al que hace referencia el teorema.

Solución:

Continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^-} (2ax^2 - bx + 1) = 2a - b + 1$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (bx^2 + ax + 2) = b + a + 2$$

$$2a - b + 1 = b + a + 2 \Longrightarrow a - 2b = 1$$

Derivabilidad en $x = 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4ax - b & \text{si} \quad x < 1 \\ 2bx + a & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = 4a - b; \ \ f'(1^+) = 2b + a \Longrightarrow 4a - b = 2b + a \Longrightarrow a - b = 0$$

$$\begin{cases} a - 2b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 + x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x^2 - x + 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases} \Longrightarrow f'(x) = \begin{cases} -4x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

El teorema del valor medio asegura que:

$$\exists c \in [0, 2]/f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{-4 - 1}{2} = -\frac{5}{2}$$

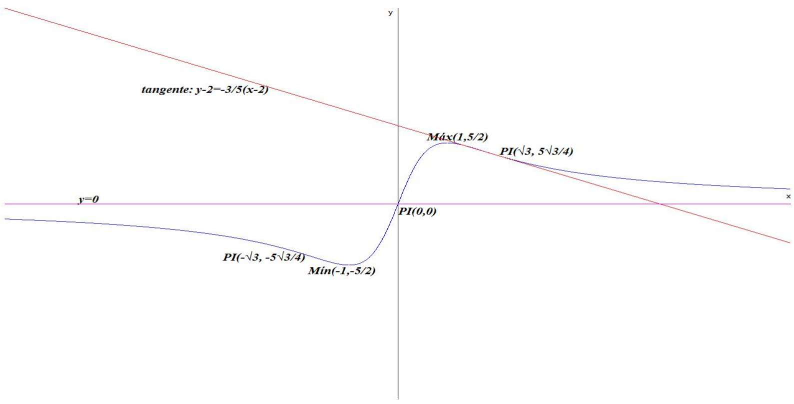
Si $c < 1$: $f'(c) = -4c + 1 = -\frac{5}{2} \Longrightarrow c = \frac{7}{8}$ solución válida. Si $c \ge 1$: $f'(c) = -2c - 1 = -\frac{5}{2} \Longrightarrow c = \frac{3}{4}$ solución no válida.

Problema 3 Dada la función $f(x) = \dfrac{5x}{x^2+1}$, se pide:

a) Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.

b) Estudiar sus asíntotas, su monotonía y su curvatura.

Solución:



a) $f'(x) = -\dfrac{5(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$$b = f(2) = 2, \ \ m = f'(2) = -\frac{3}{5}$$

$$y - 2 = -\frac{3}{5}(x-2)$$

b) Tenemos

- $\text{Dom}(f) = R$, es una función impar, con corte en $(0,0)$, es negativa en $(-\infty, 0)$ y positiva en $(0, \infty)$.
- Asíntotas: No tiene verticales, tiene una horizontal en $y = 0$ ya que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{5x}{x^2+1} = 0$ y por tanto no hay oblicuas.
- Monotonía: $f'(x) = -\dfrac{5(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-1, 1)$.
La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $(1, 5/2)$ y un mínimo en $(-1, -5/2)$.

- $f''(x) = \dfrac{10x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pm\sqrt{3}$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa	cóncava

Cóncava: $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, Convexa: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$ y con puntos de inflexión en los puntos $(0, 0)$, $(-\sqrt{3}, -5\sqrt{3}/4)$ y $(\sqrt{3}, 5\sqrt{3}/4)$.

Problema 4 Dada la función $f(x) = x^3 + 2ax^2 - bx + c$, se pide:

a) Hallar los valores de a, b y c para que la gráfica de la función tenga un extremo relativo en el punto de abcisa $x = 2$, un punto de inflexión en el de abcisa $x = 1$ y corte el eje OY en el punto de ordenada $y = 2$.

b) ¿Es el extremo relativo un máximo o un mínimo?

Solución:

a)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad f'(x) = 3x^2 + 4ax - b, \quad f''(x) = 6x + 4a$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12 + 8a - b = 0 \\ f''(1) = 0 \Longrightarrow 6 + 4a = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -3/2 \\ b = 0 \\ c = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

b)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2, \quad f'(x) = 3x^2 - 6x, \quad f''(x) = 6x - 6$$

$f''(2) = 6 > 0 \Longrightarrow$ en $x = 2$ hay un mínimo.

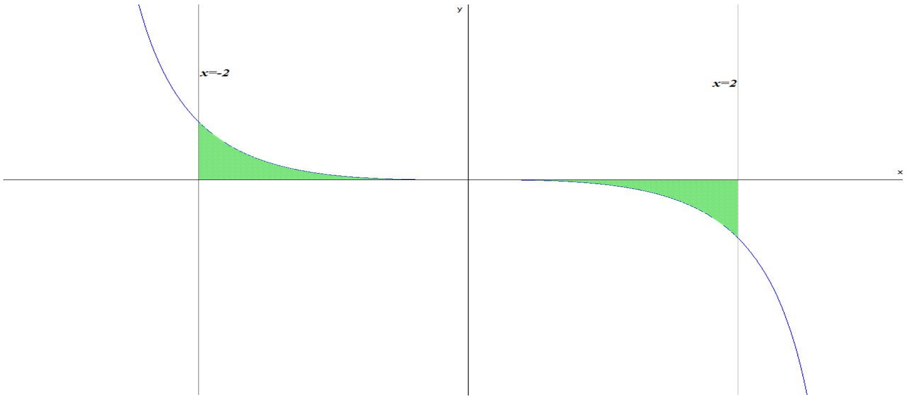
Problema 5 Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-9}$, encontrar el área encerrada por ella, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.
Solución:

$$\frac{x^3}{x^2-9} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Tendremos dos áreas a calcular S_1 con los límites de integración entre -2 y 0, y otra S_2 entre 0 y 2 (ambas son iguales, la función es impar).

$$F(x) = \int \frac{x^3}{x^2-9}\,dx = \int \left(x + \frac{9x}{x^2-9}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{9\ln|x^2-9|}{2}$$

$$S_1 = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F(-2) = -2 + \frac{9}{2}\ln\left(\frac{9}{5}\right)$$



$$S_2 = \int_0^2 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 2 - \frac{9}{2}\ln\left(\frac{9}{5}\right)$$

$$S = |S_1| + |S_2| = -2 + \frac{9}{2}\ln\left(\frac{9}{5}\right) - 2 + \frac{9}{2}\ln\left(\frac{9}{5}\right) = -4 + 9\ln\left(\frac{9}{5}\right)\ u^2 = 1,29\ u^2$$