Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2016

Problema 1 *(4 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x+ & y & + & mz = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \\ 5x+ & (m+1)y & + & 2z = & 4 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos). Discutirlo según los valores de m.
2. (1 punto). Resolverlo en el caso $m = 0$.
3. (1 punto). Resolverlo en el caso $m = 2$.

(Junio 2016 - Opción B)
Solución:

1. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad |A| = m^2 - 4 = 0 \Longrightarrow m = \pm 2$$

   Si $m \neq \pm 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
   Si $m = -2$:

   $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right); \ |A| = 0; \left|\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

   $$|A_1| = |A| = 0; \ |A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{array}\right| = -28 \neq 0;$$

   Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) <$ y el sistema es incomcompatible.

   Si $m = 2$:

   $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right); \ |A| = 0; \left|\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{array}\right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

   $F_3 = 2F_1 - F_2 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

2. Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 3x+ & y & & = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \\ 5x+ & y & + & 2z = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 7/2 \end{array}\right.$$

3. Si $m = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 3x+ & y & + & 2z = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/4 - \lambda \\ y = 7/4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir que cumplen $AB = BA$.

(Septiembre 2015 - Opción B)

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & a \\ 3c+d & c \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3a+c = 3a+b \\ 3b+d = a \\ a = 3c+d \\ b = c \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 3b+d \\ b = c \end{array}\right.$$

$$B = \begin{pmatrix} 3c+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix}, \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se pide:}$$

1. (1,25 puntos). Hallar el rango de A en función de t.
2. (0,75 puntos). Calcular t para que $\det(A - tI) = 0$.

(Junio 2015 - Opción B)

Solución:

1. $|A| = t^2 - 9t + 14 = 0 \Longrightarrow t = 7$ y $t = 2$. Si $t \neq 7$ y $t \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.
   Si $t = 7$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}; \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

   Si $t = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \ |A| = 0, \ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

2.

$$A - tI = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 3 & -1 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - tI| = -2(-7 + t) = 0 \Longrightarrow t = 7$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (1 punto). Calcular A^{15} y A^{20}
2. (1 punto). Resolver la ecuación matricial $6X = B - 3AX$, donde X es una matriz cuadrada de orden 3.

(Junio 2015 - Opción B)
Solución:

1. $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A = I \Longrightarrow A^n = \begin{cases} A & \text{si} \ n \ \text{impar} \\ I & \text{si} \ n \ \text{par} \end{cases}$
   $A^{15} = A$ y $A^{20} = I$
2. $6X = B - 3AX \Longrightarrow 6X + 3AX = B \Longrightarrow (6I + 3A)X = B \Longrightarrow X = (6I + 3A)^{-1}B$

$$6I + 3A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(6I + 3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

$$X = (6I+3A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$