Examen de Matemáticas 2^{o}Bachillerato(CN)

Noviembre 2016

Problema 1 *(4 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax- & y & + & z= & 0 \\ x+ & y & + & az= & 0 \\ ax+ & 4y & + & 2z= & a \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a.
2. (1 punto). Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.
3. (1 punto). Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

(Junio 2016 (coincidente)- Opción B)

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & 4 & 2 & a \end{array}\right) \quad |A| = -5a^2+a+6 = 0 \Longrightarrow a = -1, \ \ a = 6/5$$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 6/5 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n^o de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a = 6/5$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 6/5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6/5 & 0 \\ 6/5 & 4 & 2 & 6/5 \end{array}\right); \ |A| = 0; \ \left|\begin{array}{rr} 6/5 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 11/5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \ \ |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 6/5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6/5 & 4 & 6/5 \end{array}\right| = 66/25 \neq 0;$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) <$ y el sistema es incomcompatible.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right); \ |A| = 0; \ \left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$F_2 = -F_1 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

2. Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & y & + & z = & 0 \\ x+ & y & + & z = & 0 \\ x+ & 4y & + & 2z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

3. Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y & - & z = & 0 \\ -x+ & 4y & + & 2z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/3 + 2\lambda \\ y = -1/3 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos). Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

2. (1,5 puntos). Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 2016 - Opción A)
Solución:

1.

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha + \beta & -4\alpha \\ 5\alpha + 4\beta & -\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3\alpha + \beta = 3 \\ -4\alpha = -8 \\ 5\alpha + 4\beta = -2 \\ -\alpha + \beta = -5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{array}\right.$$

2.

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 2\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1, \;\; \lambda = -\frac{1}{4}$$

El Rango$(A) = 2$ si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq -1/4$.

Problema 3 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

1. (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.
2. (1,5 puntos). Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.
3. (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.

(Junio 2016 (coincidente)- Opción A)

Solución:

1.

$$A^2 = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1$$

2. $AXA^{-1} = B \Longrightarrow X = A^{-1}BA$:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -16 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$|(2B)^{-1}| = \frac{1}{|2B|} = \frac{1}{8|B|} = \frac{1}{32}$$