Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2016) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)*Se considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & -1 \\ x+ & y+ & 3z = & 4 \\ 5x- & y+ & az = & 10 \end{array}\right.$$

a) (1 puntos). Clasifica el sistema en función de sus posibles soluciones para los distintos valores del parámetro a.

b) (1 punto). Resuelve el sistema para $a = 3$.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & -1 \\ x+ & y+ & 3z = & 4 \\ 5x- & y+ & az = & 10 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & a & 10 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$|A| = 3(a - 11) = 0 \Longrightarrow a = 11$$

Si $a \neq 11 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema sería Compatible Determinado.

Si $a = 11$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 11 & 10 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0, \ \left|\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0$$

Luego Rango$(A) = 2$. Como $F_3 = 2F_1+3F_2$ tendríamos que el sistema, en este caso es Compatible Indeterminado.

b) Para $a = 3$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z = & -1 \\ x+ & y+ & 3z = & 4 \\ 5x- & y+ & 3z = & 10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7/3 \\ y = 5/3 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)*

a) (1 puntos). Determinar para qué valores de a la siguiente matriz no tiene inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5-a & -2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

b) (1 punto). Considerando la matriz A del apartado anterior con $a = -1$, resolver la ecuación matricial $XA+B = CA$, donde $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 5-a & -2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 11a = 0 \Longrightarrow a = 0, \quad a = 11$$

Si $a = 0$ o $a = 11 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$. Si $a \neq 0$ y $a \neq 11 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) Para $a = -1$: $XA + B = CA \Longrightarrow X = (CA - B)A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -5/6 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -5/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & -1/4 & -17/6 \\ 3 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)*Los beneficios en miles de euros obtenidos en un gimnasio inagurado hace 5 años vienen dados por la función $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$, donde $x \in [0, 5]$ es el tiempo, medido en años, que lleva funcionando el gimnasio desde su apertura.

a) (1 punto). ¿En qué momento se alcanza el máximo beneficio y cuánto vale este beneficio máximo?

b) (1 punto). En el cuarto año de su funcionamiento se produce una renovación general de las instalaciones del gimnasio. Explica razonadamente, en términos del aumento del beneficio, si dicha renovación tuvo éxito.

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0 \Longrightarrow x = 1, \quad x = 4$

	$(0,1)$	$(1,4)$	$(4,5)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función es creciente en el intervalo: $(0,1) \cup (4,5)$

La función es decreciente en el intervalo: $(1,4)$

Luego $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $(1,37)$ y un mínimo relativo en el $(4;10)$.
Luego el beneficio máximo se da cuando ha transcurrido un año con un beneficio de 37000 euros.

b) Según se observa la función de beneficio decrece hasta el cuarto año y cuando se produce la renovación la función empieza a crecer, luego la renovación fué un éxito.

Problema 4 *(2 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 6 & \text{si} \quad x \le -1 \\ bx^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad -1 < x \le 2 \\ \frac{x-5}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

determinar los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

Solución:
En $x = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (ax + 6) = -a + 6$$

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} (bx^2 - 2x + 1) = b + 3$$

$$-a + 6 = b + 3 \Longrightarrow a + b = 3$$

En $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} (bx^2 - 2x + 1) = 4b - 3$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x-5}{(x+1)^2} = \frac{-1}{3}$$

$$4b - 3 = -\frac{1}{3} \Longrightarrow b = \frac{2}{3} \Longrightarrow a = \frac{7}{3}$$

Problema 5 *(2,5 puntos)* En un taller textil se confeccionan dos tipos de prendas: trajes y abrigos. Los trajes requieren 2 metros de lana y 1,25 metros de algodón, y los abrigos requieren 1,5 metros de lana y 2,5 metros de algodón. Se disponen semanalmente de 300 metros de lana y 350 metros de algodón, y esta semana deben fabricarse al menos 20 abrigos. Empleando técnicas de programación lineal, determina cuántos trajes y abrigos hay que hacer esta semana si se desea maximizar el beneficio obtenido, sabiendo que se ganan 250 euros por cada traje y 350 euros por cada abrigo. ¿ A cuánto asciende dicho beneficio?
(Junio 2015 - Opción B) Castilla-León
Solución:
LLamamos x : al nº de trajes e y al nº de abrigos.

	Lana	Algodón	Beneficio
Traje	2	$1,25$	250
Abrigo	$1,5$	$2,5$	350
	$\leq\ 300$	$\leq\ 350$	

$$z(x,y) = 250x + 350y$$

sujeto a

$$\begin{cases} 2x + 1,5y \leq 300 \\ 1,25x + 2,5y \leq 350 \\ y \geq 20 \\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 3y \leq 600 \\ x + 2y \leq 280 \\ y \geq 20 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z(0,20) = 7000 \\ z(135,20) = 40750 \\ z(72,104) = 54400 \ \text{Máximo} \\ z(0,140) = 49000 \end{cases}$$

Hay que confeccionar 72 trajes y 104 abrigos para que el beneficio sea máximo con un montante de 54400 euros.

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Marzo 2016) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2+x-5}{x-1}$. Se pide:

a) El dominio de definición y los puntos de corte.

b) La asíntotas.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen.

d) Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = R - \{1\}$ y los puntos de corte son: $(0,5)$ con el eje de ordenadas y $\left(\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}, 0\right)$ con el eje de abcisas.

b) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = 1$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{x^2+x-5}{x-1} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty; \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{x^2+x-5}{x-1} = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty$$

- **Horizontales:** No hay; $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{x^2+x-5}{x-1} = \infty$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^2+x-5}{x^2-x} = 1$$

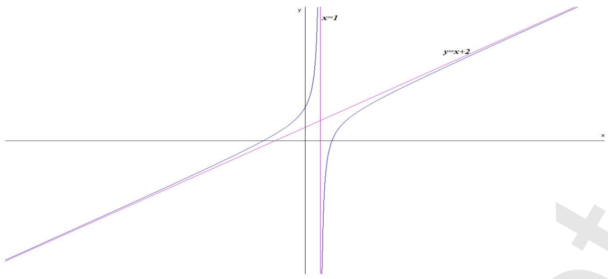
$$n = \lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x^2+x-5}{x-1} - x\right) = 2$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x + 2$

c) La función es creciente en $R - \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{x^2-2x+4}{(x-1)^2} \neq 0 \Longrightarrow \text{no tiene extremos}$$

d) Representación gráfica:



Problema 2 *(2 puntos)* Pablo, Julia y María han comprado un regalo. Julia a gastado la mitad de dinero que María, y Pablo ha gastado el triple que Julia.

a) (1 punto). Explique razonadamente si con estos datos basta para determinar cuánto ha gastado cada uno de ellos.

b) (1 punto). Si además nos dicen que entre los tres se han gastado 63 euros, ¿cuánto ha gastado cada uno?

Solución:
Sea x: lo gastado por Pablo, y: lo gastado por Julia y z: lo gastado por María.

a) El sistema

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{SCI}$$

tendría infinitas soluciones.

b) El sistema

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ x + y + z = 63 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 31,5 \\ y = 10,5 \\ z = 21 \end{cases}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine x para que se verifique la ecuación $A^2 - 6A + 5I = O$, donde O es la matriz cuyos elementos son 0.

Solución:
$A^2 - 6A = -5I$:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$x^2 - 6x = -5 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 5$$

Problema 4 *(2 puntos)* Representa gráficamente la región determinada por el sistema de inecuaciones:

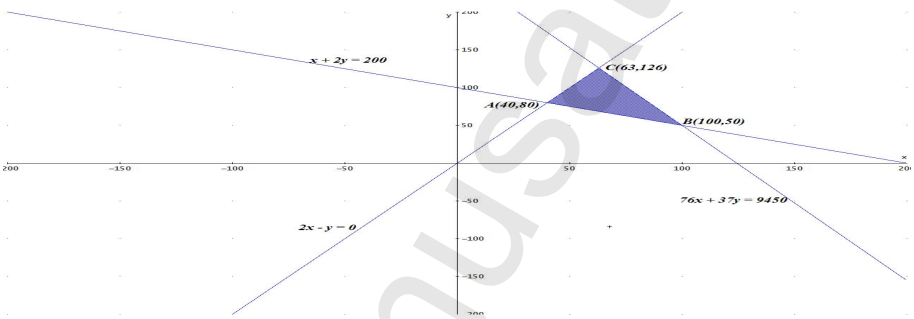
$$\begin{cases} x \geq \frac{y}{2} \\ 760x + 370y \leq 94500 \\ y + \frac{x}{2} \geq 100 \end{cases}$$

y calcula sus vértices. ¿Cuál es el máximo de la función $f(x, y) = x + y$ en esta región? ¿En qué punto se alcanza?

Solución:

a)

$$\begin{cases} x \geq \frac{y}{2} \\ 760x + 370y \leq 94500 \\ y + \frac{x}{2} \geq 100 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y \geq 0 \\ 76x + 37y \leq 9450 \\ x + 2y \geq 200 \end{cases}$$



b) $f(x, y) = x + y$

$$\begin{cases} F(40, 80) = 120 \\ F(100, 50) = 150 \\ F(63, 126) = 189 \ \text{Máximo} \end{cases}$$

Problema 5 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$.

a) (1 punto). Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) (1 punto). Calcúlese $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx$.

Solución:

a) $f'(x) = 12x^2 - 6x - 2$:

$$b = f(1) = -1, \quad m = f'(1) = 4, \Longrightarrow \ y + 1 = 4(x - 1)$$

.

b) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (4x^3 - 3x^2 - 2x)dx = x^4 - x^3 - x^2\Big]_2^3 = 41$