Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2016)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$

a) Determínese para qué valores de $a \in R$ es invertible A.

b) Resuélvase para $a = 0$ el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $|A| = a^2 + 10a - 24 = 0 \Longrightarrow a = -12 \;\; a = 2$ La matriz será invertible para cualquier valor de a diferente de éstos.

b) Para $a = 0$ la matriz es invertible y, como se trata de un sistema homogéneo, el sistema es compatible determinado y su única solución es la trivial $x = y = z = 0$.

Problema 2 *(2 puntos)* Determínese la matriz X que verifica

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$$

Solución:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right] \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}$$

a) Estudíense y determínense sus asíntotas.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

a) Asíntotas:

- Verticales: $1 - x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$
  Si $x = -1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow -1^-} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^-}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow -1^+} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{-1}{0^+}\right] = -\infty \end{cases}$$

  Si $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^3}{1-x^2} = \left[\dfrac{1}{0^-}\right] = -\infty \end{cases}$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$$

- Oblícuas: $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^3}{x - x^3} = -1$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x \right) = 0$$

$$y = -x$$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2(3-x^2)}{1-x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente $\nearrow$	creciente $\searrow$	decreciente $\nearrow$

La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$, y es creciente en el intervalo $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Problema 4 *(2 puntos)* En un polígono industrial se almacenan 30000 latas de refresco procedentes de las fabricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en 2016 caducan 1800 latas de la fábrica A, 2400 procedentes de la B y 3000 que proceden de la fábrica C.

a) Calcúlese la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2016.

b) Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y caduca en 2016, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la fábrica A?

Solución:

a) Casos favorables: $1800 + 2400 + 3000 = 7200$ y casos posibles 30000. Por la ley de Laplace:

$$p = \frac{7200}{30000} = \frac{6}{25}$$

b) Casos favorables: 1800 y casos posibles 7200. Por la ley de Laplace:

$$p = \frac{1800}{7200} = \frac{1}{4}$$

Problema 5 *(2 puntos)* El tiempo diario que los adultos de una determinada ciudad dedican a actividades deportivas, expresado en minutos, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos.

a) Para una muestra aleatoria simple de 250 habitantes de esa ciudad se ha obtenido un tiempo medio de dedicación a actividades deportivas de 90 minutos diarios. Calcúlese un intervalo de confianza al 90 % para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe de tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 1 minuto con el mismo nivel de confianza del 90 %?

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 1,64$, $\overline{X} \approx N\left(90; \frac{20}{\sqrt{250}}\right) = N(90; 1,265)$:

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,64\frac{20}{\sqrt{250}} = 2,07$$

$$IC = (\overline{X} - E, \overline{X} + E) = (87,93; 92,07)$$

b) $z_{\alpha/2} = 1,64$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 1 = 1,64\frac{20}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \simeq 1075,85 \Longrightarrow n = 1076$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II (Modelo 2015) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + ay - 2z = 5 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del a.

b) Resuélvase el sistema en el caso $a = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{array} \right); \quad |A| = a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 3$$

- Si $a \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = 3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{array} \right); \quad |A| = 0 \text{ y } \left| \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

como $\left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{array} \right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \Longrightarrow$ el sistema es incompatible (no tiene solución).

b) Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

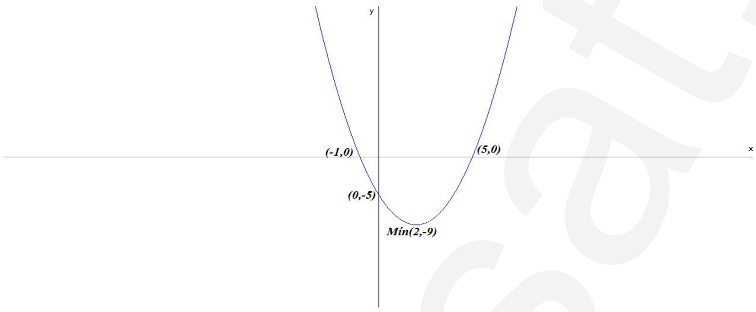
$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

a) Represéntese gráficamente la función f.

b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a) Representación:



b) $$\int_{-1}^{5}\left(x^2-4x-5\right)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right]_{-1}^{5} = -36$$

$$S = |-36| = 36\,u^2$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real

$$f(x) = x^2 e^{x^2}$$

a) Calcúlese su función derivada.

b) Determínense sus intervalos de concavidad ($\cap$) y convexidad ($\cup$).

Solución:

a) $f'(x) = 2xe^{x^2}(1+x^2)$

b) $f''(x) = 2e^{x^2}(2x^4+5x^2+1) > 0$ siempre luego la función es siempre convexa $\cup$.

Problema 4 *(2 puntos)* Las probabilidades de que cinco jugadores de baloncesto encesten un lanzamiento de tiro libre son, respectivamente, de 0,8; 0,9; 0,7; 0,9; 0,93. Si cada jugador lanza un tiro libre siguiendo el orden anterior y considerando los resultados de los lanzamientos como sucesos independientes, calcúlese la probabilidad de que:

a) Todos los jugadores encesten su tiro libre.

b) Al menos uno de los tres primeros jugadores enceste.

Solución:

a) $p = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,9 \cdot 0,93 = 0,4218$

b) La probabilidad de que no enceste ninguno de los tres primero es $0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,3 = 0,006$ la probabilidad que nos piden será $1 - 0,006 = 0,994$

Problema 5 *(2 puntos)* El precio (en euros) del metro cuadrado de las viviendas de un determinado municipio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 650$euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza (2265,375; 2424,625) para μ, con un nivel de confianza del 95 %. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.

b) Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 225. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral con un nivel de confianza del 99 %.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

a) $\sigma = 650$ y $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{X} - E = 2265,375 \\ \overline{X} + E = 2424,625 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \overline{X} = 2345 \\ E = 79,625 = 1,96\frac{650}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 256 \end{array}\right.$$

b) Tenemos $z_{\alpha/2} = 2,57$:

$$E = 2,57\frac{650}{\sqrt{225}} = 111,367$$