Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II-Coincidente (Junio 2016) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente de $a \in R$:

$$\begin{cases} 3x + y + az = a - 2 \\ ax - y + z = a - 2 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores del a.

b) Resuélvase para $a = 0$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & a & a-2 \\ a & -1 & 1 & a-2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad |A| = 2a^2 - 8 = 0 \Longrightarrow a = \pm 2$$

- Si $a \neq \pm 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{Rango}(\overline{A}) =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado. (Solución única)
- Si $a = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 32 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

como $\text{Rango}(\overline{A}) = 3 \neq \text{Rango}(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

- Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right); \quad |A| = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

como $F_3 = F_1 - F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 = \text{Rango}(A) <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $a = 0$:

$$\left\{\begin{array}{r} 3x + y = -2 \\ -y + z = -2 \\ x + 2y + z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real:

$$f(x) = x^2 + 4$$

.

a) Escríbase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 2$.

b) Determínese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, la recta $y = 4x$ y el eje de ordenadas.

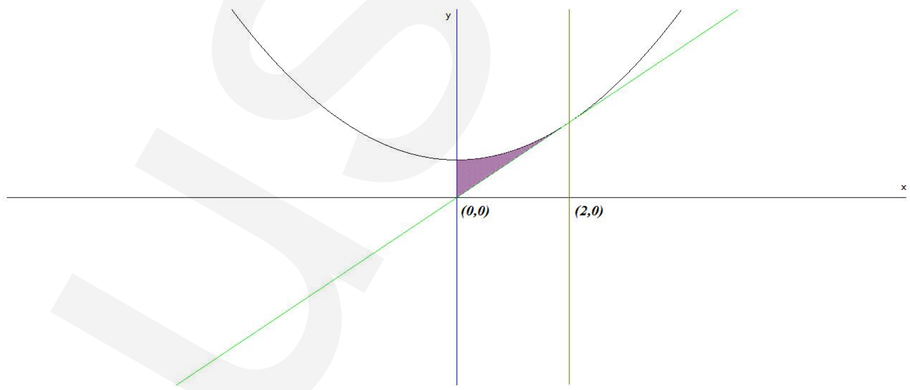
Solución:

a) $b = f(2) = 8$, $f'(x) = 2x$, $m = f'(2) = 4$. La ecuación de la recta tangente es: $y - 8 = 4(x - 2)$

b) $f(x) = g(x) \Longrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$ (doble), como el eje de ordenadas (OY) es la recta $x = 0$ el intervalo de integración es $[0, 2]$.

$$S_1 = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)\, dx = \left.\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S = |S_1| = \frac{8}{3}\ u^2$$



Problema 3 *(2 puntos)* Dada la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$$

a) Determínense las asíntotas de $f(x)$.

b) Determínense los máximos y los mínimos relativos de $f(x)$.

Solución:

a) Asíntotas:

- **Verticales:** $x = -2$

$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \left[\frac{9}{0^+}\right] = +\infty$$

- **Horizontales:** No hay

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x+2} = \infty$$

- **Oblicuas:** $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x^2+2x} = 1$$

$$n = \lim_{x\longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\longrightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^2}{x+2} - x\right) = -4$$

Luego la asíntota oblicua es $y = x - 4$

b) $f'(x) = \dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 1$ y $x = -5$:

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, -5) \cup (1, \infty)$.

La función es decreciente en el intervalo $(-5, 1)$.

La función tiene un mínimo en $(1, 0)$ y un máximo en $(-5, -12)$.

Problema 4 *(2 puntos)* Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,5$ y $P(\overline{B}) = 0,8$. Calcúlese:

a) $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

b) $P(\overline{A}|\overline{B})$.

Nota: $\overline{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.
Solución:

$$P(A) = 0,5, \quad P(B) = 0,2$$

a) Como A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6$$

b)

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\overline{B})} = \frac{1 - 0,6}{0,8} = 0,5$$

Problema 5 *(2 puntos)* El peso en kilogramos (kg) de los recién nacidos en 2014 en cierta ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0,60$ kg.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 100 y se obtiene un peso medio para los recién nacidos de esa ciudad de $\overline{X} = 3,250$ kg. Determínese un intervalo de confianza al 98 % para μ.

b) Determínese el tamaño mínimo de la muestra aleatoria simple para que el error cometido en la estimación de μ, con un nivel de confianza del 95 %, sea a lo sumo de 0,2 kg.

Solución:

a) $z_{\alpha/2} = 2,325$, $n = 100$ y $\overline{X} = 3,25$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2,325\frac{0,6}{\sqrt{100}} = 1,325$$
$$IC = (\overline{X} - E; \overline{X} - E) = (3,1105; 3,3895)$$

b) $E = 0,2$ y $z_{\alpha/2} = 1,96$:

$$0,2 = 1,96\frac{0,6}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n \geq 34,5744 \Longrightarrow n = 35$$

Examen de Matemáticas Aplicadas a las CC. Sociales II-Coincidente (Junio 2015) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo a un número real.

a) Determínese a para que la matriz A admita inversa.

b) Para $a = 1$, determínese la matriz X que verifica $A \cdot X + A = Id$.

Solución:

a) $|A| = a(2 - a) = 0 \Longrightarrow a = 0$ y $a = 2$
Si $a = 0$ o $a = 2 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow \nexists A^{-1}$.
Si $a \neq 0$ y $a \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \exists A^{-1}$.

b) $A \cdot X + A = I \Longrightarrow A \cdot X = I - A \Longrightarrow X = A^{-1}(I - A)$:
Para $a = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea S la región del plano definida por:

$$y + x \leq 5; \quad 2x - y \geq -2; \quad x \geq 0; \quad y \geq 1$$

a) Represéntese la región S y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

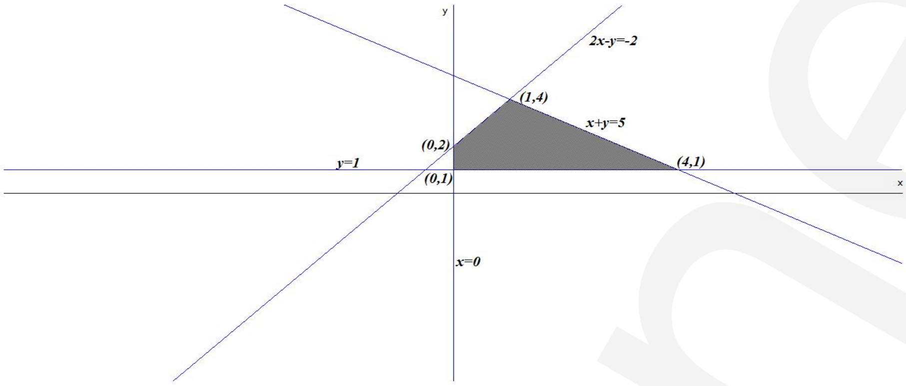
b) Obténganse los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 2x - 3y$ en la región S indicando los puntos de S en los cuales se alcanzan dichos valores máximo y mínimo.

Solución:

a) Se trata de un problema de programación, hay que optimizar la función objetivo $f(x, y) = 2x - 3y$ calculando su máximo y su mínimo, sujeto a las restricciones (Región factible):

$$S : \begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x - y \geq -2 \\ y \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

La región S y los vértices a estudiar serán: $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 4)$, y $(4, 1)$:



b)

$$\begin{cases} f(0,1) = -3 \\ f(0,2) = -6 \\ f(1,4) = -10 \text{ Mínimo} \\ f(4,1) = 5 \text{ Máximo} \end{cases}$$

El mínimo es -10 y se alcanza en el punto $(1,4)$ y el máximo es de 5 y se alcanza en el punto $(4,1)$.

Problema 3 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$$

a) Determínense los valores de los parámetros reales a y b si se sabe que la recta $y = x$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Para $a = 1$ y $b = 0$, calcúlese el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX.

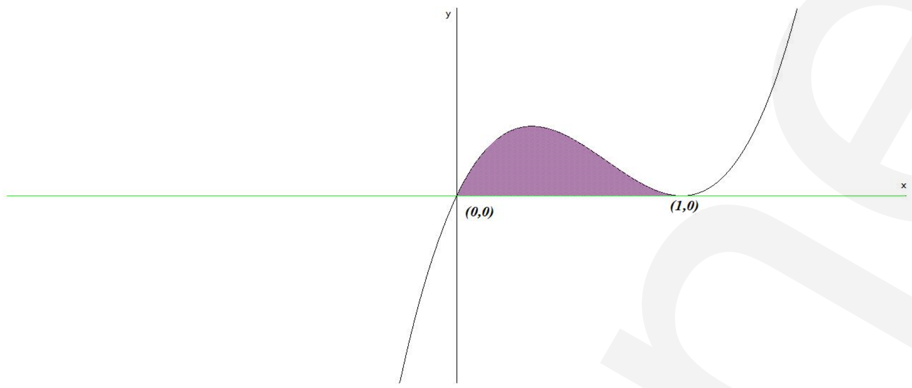
Solución:

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + a \Longrightarrow m = f'(0) = a = 1$.
El punto de tangencia es común a la curva y a la recta $(y = x)$, luego es el $(0,0) \Longrightarrow f(0) = b = 0$.

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 1$:

$$S_1 = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\,dx = \left.\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$S = |S_1| = \frac{1}{12}\ u^2$$

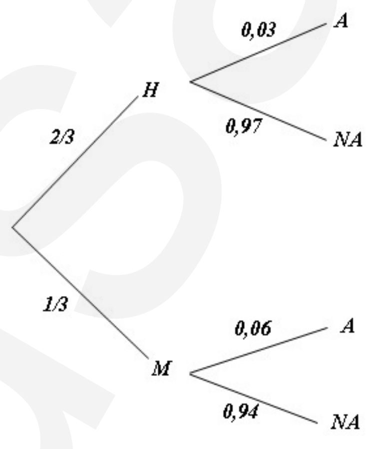


Problema 4 *(2 puntos)* En cierta población animal tratada genéticamente, el número de hembras es el doble que el número de machos. Se observa que el 6 % de los machos de esa población padece albinismo, mientras que entre las hembras únicamente el 3 % padece albinismo. Calcúlese la probabilidad de que un individuo de esa población elegido al azar:

a) Padezca albinismo.

b) Sea hembra, en el supuesto de que padezca albinismo.

Solución:
$H \equiv$ Hembra, $M \equiv$ Macho.



$$P(H) = \frac{2}{3}, \quad P(M) = \frac{1}{3}, \quad P(A|M) = 0,06, \quad P(A|H) = 0,03$$

a)

$$P(A) = P(A|H) \cdot P(H) + P(A|M) \cdot P(M) = \frac{2}{3} \cdot 0,03 + \frac{1}{3} \cdot 0,06 = 0,04$$

b)

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{P(A)} = \frac{0,03 \cdot 2/3}{0,04} = 0,5$$

Problema 5 *(2 puntos)* La distancia diaria recorrida, en kilómetros (km), por un taxi en una gran ciudad puede aproximarse por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 16$ km.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 81 taxis y se obtiene el intervalo de confianza (159; 165). Determínese el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

b) Si la media de la distancia recorrida fuera $\mu = 160$ km, y se toma una muestra aleatoria simple de 64 taxis, calcúlese la probabilidad de que la media de la muestra, $\overline{X}$, sea mayor que 156 km.

Solución:

$$N(\mu; 650)$$

a) $\sigma = 16$, $n = 81$ y $IC = (159; 165)$

$$\begin{cases} \overline{X} - E = 159 \\ \overline{X} + E = 165 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \overline{X} = 162 \\ E = 3 \end{cases}$$

$$E = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow 3 = z_{\alpha/2}\frac{16}{\sqrt{81}} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1,6875$$

$$P(Z \le 1,69) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9545 \Longrightarrow$$

$$\alpha = 0,091 \Longrightarrow NC = 1 - 0,091 = 0,909 = 90,9\,\%$$

b) $\mu = 160$, $n = 64$, $\overline{X} \approx N\left(160, \frac{16}{\sqrt{64}}\right) = N(160, 2)$

$$P(\overline{X} \ge 156) = P\left(Z \ge \frac{156 - 160}{2}\right) =$$

$$P(Z \ge -2) = 1 - P(Z \le -2) = 1 - (1 - P(Z \le 2)) = P(Z \le 2) = 0,9772$$