Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CS)

Noviembre 2015

Problema 1 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real k:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} kx- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & kz = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right.$$

1. Discútase el sistema para los distintos valores de k.
2. Resúelvase el sistema para el caso en que tenga infinitas soluciones.
3. Resúelvase el sistema para $k = 0$.

(Junio 2010 - Opción B)

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -k^2+k+2 = 0 \Longrightarrow k = -1, \;\; k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =nº de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

Si $k = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left|\begin{array}{rrr} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right| = 12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Como $\left|\begin{array}{rr} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Luego el sistema es Incompatible.

Si $k = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que : $|C_1C_2C_3| = |C_1C_3C_4| = |C_1C_2C_4| = |C_2C_3C_4| = 0$

$\left|\begin{array}{rr} -2 & 7 \\ -1 & 2 \end{array}\right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow$ el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

2. Si $k = 2$ el sistema es compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x- & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y+ & 2z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} - \lambda \\ \\ y = \lambda \\ \\ z = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

3. Si $k = 0$ el sistema es compatible determinado:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} - & 2y+ & 7z = & 8 \\ x- & y & = & 2 \\ -x+ & y+ & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 10 \\ z = 4 \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Un estudiante ha gastado un total de 48 euros en la compra de una mochila, un bolígrafo y un libro. Si el precio de la mochila se redujera a la sexta parte, el del bolígrafo a la tercera parte y el del libro a la septima parte de sus respectivos precios iniciales, el estudiante pagaría un total de 8 euros por ellos. Calcular el precio de la mochila, del bolígrafo y del libro, sabiendo que la mochila cuesta lo mismo que el total del bolígrafo y el libro.
(Modelo 2011 - Opción A)
Solución:
Sea x : precio de la mochila, y : precio del bolígrafo y z : precio del libro.

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 48 \\ \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{3}y + \dfrac{1}{7}z = 8 \\ x = y + z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + y + z = 48 \\ 7x + 14y + 6z = 336 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 24 \\ y = 3 \\ z = 21 \end{array}\right.$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcúlense los valores de a para los cuales la matriz A no tiene inversa.
2. Para $a = 2$, calcúlese la matriz inversa A^{-1}.
3. Para $a = 2$, calcúlese, si existe, la matriz X que satisface $AX = B$.

(Modelo 2011 - Opción B)
Solución:

1. $|A| = 5 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{5}$:

   Si $a = \pm\sqrt{5} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow A$ no tiene inversa.

   Si $a \neq \pm\sqrt{5} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow A$ si tiene inversa.

2. Para $a = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

3. $AX = B \Longrightarrow X = A^{-1}B$:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

1. Estúdiese el rango de A según los valores del parámetro real k.

2. Calcúlese, si existe, la matriz inversa de A para $k = 3$.

(Junio 2015 - Opción B)
Solución:

1. $|A| = 0 \Longrightarrow 8 - 4k = 0 \Longrightarrow k = 2$.
   Si $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.
   Si $k = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; |A| = 0, \text{ y } \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

2. $k = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ -3/4 & 2 & -3/2 \end{pmatrix}$$