Examen de Matemáticas II (Marzo 2016)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 \end{pmatrix}$, para $a \in R$

a) Calcular el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro a

b) Discuta y resuelva el sistema de ecuaciones lineales

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

según los valores del parámetro a.

Solución:

a) $|M| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3, \ \forall a \in R$

b) $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un sistema compatible determinado por el apartado anterior:

$$\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 1 & a+1 & (a+1)^2 & 1 \\ 1 & a-1 & (a-1)^2 & 1 \end{array}\right) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & 2a+1 & 0 \\ 0 & -1 & -2a+1 & 0 \end{array}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 + F_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & 2a+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Considere el punto $A(1, 2, 3)$

a) (1 punto). Calcular el punto simétrico de A respecto de la recta de ecuación

$$r : (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda)$$

b) (1 punto). Calcular el punto simétrico de A respecto del plano que tiene por ecuación $\pi : x + y + z = 3$

Solución:

a)
- Buscamos un plan $\pi' \perp r$ que pase por A, $\overrightarrow{u_{\pi'}} = \overrightarrow{u_r} = (1, 0, -1)$:

$$x - z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 - 3 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow x - z + 2 = 0$$

$$r : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

- Calculamos el punto de corte entre r y π':

$$(3 + \lambda) - (3 - \lambda) + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

Luego el punto es el $A'(2, 1, 4)$.

- El punto A'' simétrico de A respecto de A' tiene que cumplir:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = (3, 0, 5)$$

b)
- Buscamos una recta $s \perp \pi$ que pase por A, $\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1, 1, 1)$

$$s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

- Calculamos A' punto de corte entre s y π:

$$(1 + \lambda) + (2 + \lambda) + (3 + \lambda) = 3 \Longrightarrow \lambda = -1$$

Luego el punto es el $A'(0, 1, 2)$.

- El punto A'' simétrico de A respecto de A' tiene que cumplir:

$$\frac{A + A''}{2} = A' \Longrightarrow A'' = 2A' - A = (-1, 0, 1)$$

Problema 3 *(2 puntos)* Sean r y s las rectas de R^3 de ecuaciones

$$r : \frac{x - 2}{3} = y = \frac{z + 1}{4} \;\text{ y }\; s : (x, y, z) = (1 + 2\alpha, 3 - \alpha, 4 + 3\alpha) \;\text{ con } \alpha \in R$$

a) (1 punto). Comprobar que los puntos medios de los segmentos que tienen un extremo situado sobre la recta r y el otro extremo situado sobre la recta s forman un plano.

b) (1 punto). Halle la ecuación general (es decir, que tiene la forma Ax+By+Cz+D=0) del plano del apartado anterior.

Solución:

a) Un punto genérico de la recta r sería $P_1(2+3\lambda, \lambda, -1+4\lambda)$ y un punto genérico de la recta s sería $P_2(1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$. El punto medio entre estos dos puntos será:

$$(x, y, z) = \left(\frac{3+3\lambda+2\alpha}{2}, \frac{3+\lambda-\alpha}{2}, \frac{3+4\lambda+3\alpha}{2}\right)$$

Es decir:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\lambda + \alpha \\ \\ y = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\lambda - \dfrac{1}{2}\alpha \\ \\ z = \dfrac{3}{2} + 2\lambda + \dfrac{3}{2}\alpha \end{cases} \Longrightarrow \text{Ecuación paramétrica de un plano } \pi$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u} = \dfrac{1}{2}(3, 1, 4) \\ \\ \overrightarrow{v} = \dfrac{1}{2}(2, -1, 3) \\ \\ P\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 3 & 2 & x-3/2 \\ 1 & -1 & y-3/2 \\ 4 & 3 & z-3/2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 14x-2y-10z-3 = 0$$

Problema 4 *(3 puntos)* Resolver:

a) (0,5 puntos). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$

b) (0,5 puntos). $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

c) (1 punto). Calcular el valor de m de tal forma que $\lim\limits_{x\longrightarrow \infty} \dfrac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4} = 6$

d) (1 punto). $\displaystyle\int x^2 \sin 2x \, dx$

Solución:

a)

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2\sin x\cos x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2\cos^2 x - 2\sin^2 x}{2} = 1$$

b)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1}=0$$

c)

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2+4}=-2m=6\Longrightarrow m=-3$$

d)

$$\int x^2\sin 2x\,dx=\left[\begin{array}{l} u=x^2\Longrightarrow du=2xdx\\ dv=\sin 2x\,dx\Longrightarrow v=-\frac{1}{2}\cos 2x\end{array}\right]=$$

$$-\frac{x^2\cos 2x}{2}+\int x\cos 2x\,dx=\left[\begin{array}{l} u=x\Longrightarrow du=dx\\ dv=\cos 2x\,dx\Longrightarrow v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right]=$$

$$-\frac{x^2\cos 2x}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx=-\frac{x^2\cos 2x}{2}+\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}+C$$

Examen de Matemáticas II (Marzo 2016) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)* Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2+2}$. Se pide calcular:

a) (1 punto). Determine las asíntotas, horizontales, verticales y oblicuas, que tenga la función $f(x)$.

b) (1 punto). Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$. ¿Tiene la función $f(x)$ algún máximo o mínimo relativo?

Solución:

a)

b) Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, el denominador no se anula nunca.
- **Horizontales:** $y=1$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2}=1$$

- **Oblicuas:** No hay por haber horizontales.

c)

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.
La función es decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.
La función tiene un máximo en el punto $(0, 3/2)$.

Problema 2 *(2 puntos)* Resolver:

a) (1 punto). $\displaystyle\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 2}\, dx$

b) (0,5 puntos). $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2 - \sqrt{x}}$

c) (0,5 puntos). $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2}$

Solución:

a)

$$\int \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{x^2 - x - 2}\, dx = \int \left(2x - 1 + \frac{x-3}{x^2 - x - 2}\right) dx =$$

$$= x^2 - x + \frac{4}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-2| + C$$

$$\frac{x-3}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{x^2-x-2}$$

$$x-3 = A(x-2)+B(x+1) \Longrightarrow \begin{cases} \text{con } x = 2 \Longrightarrow -1 = 3B \Longrightarrow B = -1/3 \\ \text{con } x = -1 \Longrightarrow -4 = -3A \Longrightarrow A = 3/4 \end{cases}$$

b)

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\ln(2x-1)}{x^2 - \sqrt{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\frac{2}{2x-1}}{2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{4}{3}$$

c) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} (\cos x)^{\left(\frac{1}{\sin x}\right)^2} = [1^\infty] = e^\lambda = e^{-1/2}$

$$\lambda = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin^2 x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-\sin x}{2\sin x \cos x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-1}{2\cos x} = -\frac{1}{2}$$

Problema 3 *(3 puntos)* Se dan el punto $A(-1,0,2)$ y las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2 \;\text{ y }\; s: \left\{\begin{array}{l} x = -1-2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{array}\right.$$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (1 punto). La ecuación del plano π que pasa por el punto A y contiene a r.

b) (1 punto). La ecuación del plano σ que pasa por A y es perpendicular a la recta s.

c) (1 punto). Un vector director de la recta l intersección de los planos π y σ y la distancia entre las rectas s y l.

Solución:

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,1) \\ P_r(1,0,2) \end{array}\right. \quad , \quad s: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-2,3,1) \\ P_s(-1,1,1) \end{array}\right.$$

a)

$$\pi_1: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,1 \\ \overrightarrow{AP_r} = (2,0,0) \\ P_r(1,0,2) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi: \left|\begin{array}{ccc} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 0 & y \\ 1 & 0 & z-2 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow y-3z+6=0$$

b) $\overrightarrow{u_\sigma} = \overrightarrow{u_s} = (-2,3,1)$:

$$-2x+3y+z+\lambda = 0 \Longrightarrow 2+2+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -4 \Longrightarrow \sigma: 2x-3y-z+4=0$$

c)

$$l: \left\{\begin{array}{l} y-3z+6=0 \\ 2x-3y-z+4=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \overrightarrow{u_l} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right| = -2(5,3,1), \;\; P_l(-1,0,2)$$

$\overrightarrow{P_lP_s} = (0,1,-1)$

$$[\overrightarrow{P_lP_s}, \overrightarrow{u_l}, \overrightarrow{u_s}] = \left|\begin{array}{rrr} 0 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right| = -28$$

$$|\overrightarrow{u_l} \times \overrightarrow{u_s}| = |\left|\begin{array}{rrr} i & j & k \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right|| = |-7(0,1,3)| = 7\sqrt{10}$$

$$d(l,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_lP_s}, \overrightarrow{u_l}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_l} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-28|}{7\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}\; u$$

Problema 4 *(3 puntos)* Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $C = (-1 \ 1 \ 3)$ Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) (1 punto). La matriz inversa A^{-1} de la matriz A.

b) (1 punto). La matriz X que es solución de la ecuación $AX = BC$.

c) (1 punto). El determinante de la matriz $2M^3$, siendo M la matriz cuadrada de orden 2 cuyo determinante vale $\frac{1}{2}$.

Solución:

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $AX = BC \Longrightarrow X = A^{-1}BC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $|2M^3| = |2M||M||M| = 4|M|^3 = 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$