Examen de Matemáticas II (Septiembre 2016)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = (6-x)e^{x/3}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar su dominio, asíntotas y cortes con los ejes.

b) (1 punto). Calcular su derivada, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.

c) (1 punto). Determinar el área del triángulo que forman los ejes coordenados con la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = 0$.

Solución:

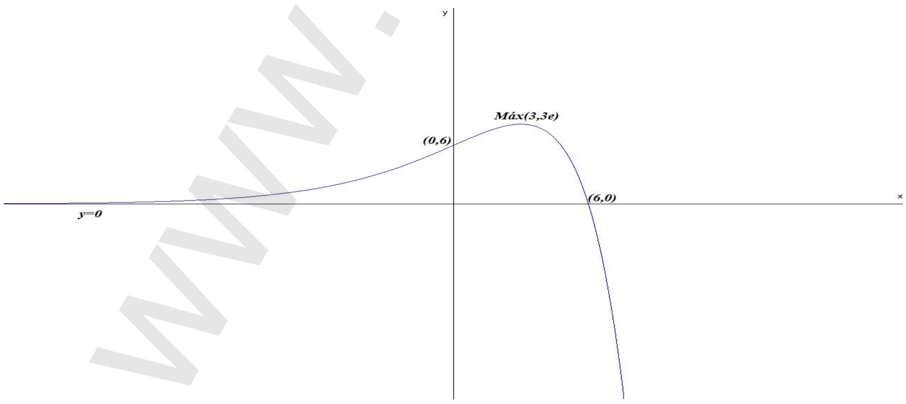
a) $Dom(f) = R$, y los puntos de corte serán $(6,0)$ y $(0,6)$. Asíntotas verticales no hay, estudiamos las horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}(6-x)e^{x/3} = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}(6-x)e^{x/3} = \lim_{x\longrightarrow +\infty}(6+x)e^{-x/3} = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{6+x}{e^{x/3}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{1}{1/3e^{x/3}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Luego, cuando $x \longrightarrow -\infty$ tenemos la asíntota horizontal $y = 0$. Como hay horizontales no hay oblicuas.



b) $f'(x) = \left(1 - \frac{x}{3}\right)e^{x/3} = 0 \Longrightarrow x = 3$

	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función f es creciente en $(-\infty, 3)$ y decreciente en $(3, \infty)$. Presenta un máximo relativo en el punto $(3, 3e)$.

c) $a = 0 \Longrightarrow b = f(a) = f(0) = 6$ y $m = f'(a) = f'(0) = 1$. La recta tangente a la función es $y - 6 = x \Longrightarrow y = x + 6$. Esta recta corta a los ejes coordenados en los puntos $(-6, 0)$ y $(0, 6)$ que con el eje OY forma un triángulo de base 6 u y altura 6 $u \Longrightarrow S = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18\ u^2$.
Otra forma:

$$S = \int_{-6}^{0} (x + 6)\, dx = \left.\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-6}^{0} = 18\ u^2$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r : \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ y $s : \{(2 + \lambda, 1 - 3\lambda, \lambda); \lambda \in R\}$

a) (1 punto). Obtener la recta que pasa por el punto $P(1, 0, 5)$ y corta perpendicularmente a r.

b) (1 punto). Obtener el plano que contiene a la recta r y es paralelo a s.

c) (1 punto). Hallar la distancia entre las rectas r y s.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2, -3, 1) \\ P_r(1, 3, 0) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -3, 1) \\ P_s(2, 1, 0) \end{cases}$$

a) Seguimos el siguiente proceso:

- Calculamos $\pi_1 \perp r /\, P(1, 0, 5) \in \pi_1$:

$$2x - 3y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 2 - 0 + 5 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -7$$

$$\pi_1 : 2x - 3y + z - 7 = 0$$

- Calculamos el punto de corte P' de π_1 con r:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$2(1 + 2\lambda) - 3(3 - 3\lambda) + (\lambda) - 7 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow P'(3, 0, 1)$.

- La recta t buscada pasa por P y P':

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{PP'} = (3, 0, 1) - (1, 0, 5) = (2, 0, -4) \\ P_t = P(1, 0, 5) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 5 - 4\lambda \end{cases}$$

b)

$$\pi : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,-3,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-3,1) \\ P_r(1,3,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi : \begin{vmatrix} 2 & 1 & x-1 \\ -3 & -3 & y-3 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow y+3z-3=0$$

c) $\overrightarrow{P_rP_s} = (1,-2,0)$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = |\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}| = 2$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}| = |(0,-1,-3)| = \sqrt{10}$$

$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}\ u$$

Problema 3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine, si es posible, los parámetros α y β de modo que se verifique la igualdad:

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

b) (1 punto). Determine los posibles valores de λ para que el rango de la matriz A sea 2, donde

$$A = \lambda \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

a)

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\alpha+\beta & -4\alpha \\ 5\alpha+4\beta & -\alpha+\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\alpha+\beta = 3 \\ -4\alpha = -8 \\ 5\alpha+4\beta = -2 \\ -\alpha+\beta = -5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda+1 & 2\lambda \\ \lambda & 3\lambda+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1, \ \ \lambda = -\frac{1}{4}$$

El Rango$(A) = 2$ si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq -1/4$.

Problema 4 *(2 puntos)* Cierta fundación ha destinado 247000 euros para la dotación de 115 becas de estudios. El importe de cada beca es de 3000 euros, si el estudiante cursa un grado universitario; de 2000 euros, si cursa formación profesional y de 1500 euros, si realiza estudios de postgrado. Sabiendo que la fundación ha concedido doble número de becas de formación profesional que de postgrado, ¿cuántas becas ha concedido a cada nivel de estudios?

Solución:

x : nº de becas para grado, y : nº de becas para FP y z : nº de becas para postgrado.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=115 \\ 3000x+2000y+1500z=247000 \\ y=2z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=115 \\ 6x+4y+3z=494 \\ y-2z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=31 \\ y=56 \\ z=28 \end{array}\right.$$

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2016) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} 2x+ & (a-1)y & - & 2z= & a \\ 2x+ & y & - & az= & 2 \\ -x+ & y & + & z= & 1-a \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de a.

b) (1 punto). Resolverlo cuando sea posible.

Solución:

a)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & a-1 & -2 & a \\ 2 & 1 & -a & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1-a \end{array}\right) \quad |A|=a^2-a-2=0 \Longrightarrow a=-1,\ \ a=2$$

Si $a\neq -1$ y $a\neq 2 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})=$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.

Si $a=-1$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right);\ |A|=0;\ \left|\begin{array}{cc} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{array}\right|=6\neq 0 \Longrightarrow \text{ Rango}(A)=2$$

$$|A_1|=|A|=0;\ \ |A_2|=\left|\begin{array}{rrr} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{array}\right|=9\neq 0;$$

Luego Rango$(A)=2\neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incomcompatible.

Si $a=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right);\ |A|=0;\ \left|\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right|=3\neq 0 \Longrightarrow \text{ Rango}(A)=2$$

$F_1=F_2 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b)

- Si $a=2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x+ & y & - & 2z & = & 2 \\ -x+ & y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

- Si $a\neq -1$ y $a\neq 2$ por Cramer:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{ccr} a & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ 1-a & 1 & 1 \end{array}\right|}{(a+1)(a-2)}=a;$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{ccr} 2 & a & -2 \\ 2 & 2 & -a \\ -1 & 1-a & 1 \end{array}\right|}{(a+1)(a-2)}=\frac{2-a}{a+1};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & a-1 & a\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}}{(a+1)(a-2)}=\frac{2a-1}{a+1}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{5-x} & \text{si} \quad x\le 0\\ \frac{1}{5+x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y determinar sus asíntotas.

b) (1 punto). Estudiar la derivabilidad de f y calcular $f'(x)$ donde sea posible.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Solución:

a) Continuidad: Las ramas son continuas para cualquier valor, estudiamos en $x=0$

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{1}{5-x}=\frac{1}{5}\\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1}{5+x}=\frac{1}{5}\\ f(0)=\frac{1}{5} \end{cases}$$

Luego la función es continua en R.
Asíntotas verticales no tiene y las horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{1}{5-x}=0;\ \text{y}\ \lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{1}{5+x}=0\Longrightarrow y=0$$

Oblicuas no hay al tener horizontales.

b)

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{(5-x)^2} & \text{si} \quad x\le 0\\ \frac{-1}{(5+x)^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}\Longrightarrow f'(0^-)=\frac{1}{25}\ne f'(0^+)=-\frac{1}{25}$$

luego la función es derivable en $R-\{0\}$.

c)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{5-x}\,dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{5+x}\,dx=$$

$$-\ln|5-x|\big]_{-1}^{0}+\ln|5+x|\big]_{0}^{1}=2\ln\left(\frac{6}{5}\right)=0,365$$

Problema 3 *(2 puntos)* Sea π el plano que contiene a los puntos $A(0,2,1)$, $B(1,0,1)$ y $C(-1,-2,-1)$. Calcule el volumen del tetraedro que forma el origen de coordenadas con los puntos de intersección de π con cada uno de los ejes coordenados.

Solución:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,-2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,-4,-2) \\ A(0,2,1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & -1 & x \\ -2 & -4 & y-2 \\ 0 & -2 & z-1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 2x+y-3z+1=0$$

Puntos de corte con los ejes:
Con OX: $y=0$ y $z=0 \Longrightarrow x=-1/2 \Longrightarrow P_1(-1/2,0,0)$
Con OY: $x=0$ y $z=0 \Longrightarrow y=-1 \Longrightarrow P_2(0,-1,0)$
Con OZ: $x=0$ y $y=0 \Longrightarrow z=1/3 \Longrightarrow P_3(0,0,1/3)$
Con el origen formamos los vectores:
$\overrightarrow{OP_1} = (-1/2,0,0)$, $\overrightarrow{OP_2} = (0,-1,0)$ y $\overrightarrow{OP_3} = (0,0,1/3)$. El volumen de este tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6}| \left| \begin{array}{ccc} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right| | = \frac{1}{6}\left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{36}\ u^3$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : 3x+3y+z-9=0$, se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano perpendicular a π que contiene al eje OX.

b) (1 punto). Determinar el punto del plano π más cercano al origen de coordenadas.

Solución:

a) $\pi' \perp \pi / OX \subset \pi'$:

$$\pi' : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (3,3,1) \\ \overrightarrow{u_{OX}} = (1,0,0) \\ P = O(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi' : \left| \begin{array}{ccc} 3 & 1 & x \\ 3 & 0 & y \\ 1 & 0 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : y - 3z = 0$$

b) Seguimos los siguientes pasos:

- Calculamos una recta $r \perp \pi / O \in r$:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (3,3,1) \\ P_r = O(0,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte de r con π, que será el punto del plano más cercano al origen:

$$3(3\lambda)+3(3\lambda)+\lambda-9=0 \Longrightarrow \lambda = \frac{9}{19} \Longrightarrow P\left(\frac{27}{19}, \frac{27}{19}, \frac{9}{19}\right)$$