Examen de Matemáticas II (Modelo 2016)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & kz = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ kx+ & 2y- & z = & 3 \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de k.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 2$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $k = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ k & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \quad |A| = -4k^2 + 6k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1, \; k = \frac{1}{2}$$

Si $k \neq 1$ y $k \neq 1/2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right); \; |A| = 0; \left|\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \;\; |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right| = 0;$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right| = 0; \;\; |A_4| = \left|\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right| = 0$$

$$\left|\begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2.$$

Luego Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

Si $m = 1/2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1/2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1/2 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right); \ |A| = 0; \left| \begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 1/2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right| = 3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}\overline{A} = 3 \neq \text{Rango}(A) \Longrightarrow \text{ sistema}$$

incompatible.

b) Si $k = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & 2z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \\ 2x+ & 2y- & z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1/3 \\ z = -1/3 \end{array} \right.$$

c) Si $k = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 2y+ & z = & 1 \\ 2x+ & 4y+ & z = & 3 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda/2 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^3}{3}$, se pide:

a) (0,75 puntos). Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

b) (0,5 puntos). Determinar las coordenadas de sus extremos relativos.

c) (0,75 puntos). El valor máximo que puede tener la pendiente de una recta tangente a la gráfica de $f(x)$.

d) (1 punto). El volumen del cuerpo de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función en torno al eje OX, entre los puntos de corte de la misma con dicho eje.

Solución:

a) $f'(x) = 4x - x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0 \ \ x = 4$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

La función es decreciente en: $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
La función es decreciente en: $(0, 4)$

b) La función tiene un mínimo en $(0,0)$ y un máximo en $(4,32/3)$.

c) Llamamos $g(a) = f'(a) = 4a - a^2$ y tenemos que optimizar esta función: $g'(a) = 4 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 2$ y $g''(a) = -2$, es decir $g''(2) = -2 < 0 \Longrightarrow$ en $a = 2$ hay un máximo. La máxima pendiente de las rectas tangentes a $f(x)$ será: $g(2) = 4$.

d) $f(x) = 2x^2 - \dfrac{x^3}{3} = 0 \Longrightarrow x = 0$ y $x = 6$:

$$V = \pi \int_0^6 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^7}{63} + \frac{4x^5}{5} - \frac{2x^6}{9}\right]_0^6 = \frac{10368\pi}{35}\, u^3$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 5$ y la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right.$ se pide:

a) (1 punto). Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto $P(1,0,1)$.

b) (1 punto). Hallar la ecuación de la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $Q(2,1,1)$.

Solución:

a) $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,3,1) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right.$ y $\overrightarrow{PP_r} = (0,0,-1)$

$$\pi : \left| \begin{array}{ccc} -1 & 0 & x-1 \\ 3 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : 3x + y - 3 = 0$$

b) $s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,-1) \\ P_s = Q(2,1,1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \right.$

Problema 4 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(0,1,1)$, se pide:

a) (1 punto). Hallar todos los puntos R que equidistan de P y Q. Describir dicho conjunto de puntos.

b) (1 punto). Hallar los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifiquen que $d(P,S) = 2d(Q,S)$.

Solución:

a) El conjunto de puntos $R(x, y, z)$ que equidistan de P y Q es un plano mediador:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2+(z-1)^2}\Longrightarrow$$

$$2x+4z-9=0$$

b) La recta que pasa por P y Q es:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{QP}=(1,0,2)\\ P_r=Q(0,1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=\lambda\\ y=1\\ z=1+2\lambda\end{array}\right.$$

$$S(x,y,z)=(\lambda,1,1+2\lambda)$$

$$d(P,S)=2d(Q,S)\Longrightarrow\sqrt{(\lambda-1)^2+(-2+2\lambda)^2}=2\sqrt{\lambda^2+(2\lambda)^2}\Longrightarrow$$

$$\lambda=-1,\ \ \lambda=\frac{1}{3}\Longrightarrow S_1(-1,1,-1),\ \ S_2\left(\frac{1}{3},1,\frac{5}{3}\right)$$

Examen de Matemáticas II (Modelo 2016) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dados los planos

$$\pi_1\equiv 3x+4y-5z-7=0,\quad \pi_2\equiv x-2y+z-3=0$$

se pide:

a) (1 punto). Hallar un vector unitario cuya dirección sea paralela a los planos π_1 y π_2.

b) (1 punto). Hallar la distancia del punto $P(3,-1,2)$ al plano π_1.

c) (1 punto). Hallar el coseno del ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

Solución:

a) El vector pedido es perpendicular a los vectores normales de los planos

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u_{\pi_1}}\times\overrightarrow{u_{\pi_2}}=\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\3&4&-5\\1&-2&1\end{array}\right|=(-6,-8,-10)\quad |\overrightarrow{u}|=10\sqrt{2}$$

El vector $\overrightarrow{v}=\left(\frac{3}{5\sqrt{2}},\frac{4}{5\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es un vector paralelo a ambos planos.

b) $d(P,\pi_1)=\dfrac{|9-4-10-7|}{\sqrt{9+16+25}}=\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$

c) $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{u_{\pi_1}}\cdot\overrightarrow{u_{\pi_2}}}{|\overrightarrow{u_{\pi_1}}|\times|\overrightarrow{u_{\pi_2}}|}=\dfrac{(3,4,-5)\cdot(1,-2,1)}{\sqrt{50}\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} |x| & \text{si} \quad x<1 \\ xe^{1-x} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$$

se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su continuidad y derivabilidad y calcular la función derivada f' donde sea posible.

b) (0,5 puntos). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

Solución:

$$f(x)=\begin{cases} |x| & \text{si} \quad x<1 \\ xe^{1-x} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases} \Longrightarrow f(x)=\begin{cases} -x & \text{si} & x<0 \\ x & \text{si} & 0\le x<1 \\ xe^{1-x} & \text{si} & x\ge 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} & x<0 \\ 1 & \text{si} & 0\le x<1 \\ (1-x)e^{1-x} & \text{si} & x\ge 1 \end{cases}$$

a) La función es continua y derivable en cualquier punto distinto de 1 ó 0, donde hacemos su estudio:

- Continuidad en $x=0$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=f(0)=0 \Longrightarrow$ la función es continua.
  Derivabilidad en $x=0$: $f'(0^-)=-1\neq f'(0^+)=1 \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x=0$.
- Continuidad en $x=1$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} f(x)=f(1)=1 \Longrightarrow$ la función es continua.
  Derivabilidad en $x=1$: $f'(1^-)=1\neq f'(1^+)=0 \Longrightarrow$ la función no es derivable en $x=1$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} -x\,dx+\int_{0}^{1} x\,dx=-\frac{x^2}{2}\bigg]_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\bigg]_{0}^{1}=1$

c) $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 xe^{1-x}\,dx = -(x+1)e^{1-x}\Big]_1^2 = 2 - \frac{3}{e}$

Problema 3 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1 punto). Calcular el valor o valores de λ que hacen que el determinante de la matriz $M - \lambda I$ sea igual a 0.

b) (1 punto). Para $\lambda = -1$, resolver el sistema de ecuaciones lineales: $(M - \lambda I)X = O$.

Solución:

a) $|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 3\lambda - 9 = 0 \Longrightarrow$ $\lambda = -1 \quad \lambda = 3$

b) $M - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a este sistema homogéneo que es claramente compatible indeterminado:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

resolver la ecuación matricial $AX + 3B = B(A^t + 3I)$, donde A^t denota la matriz transpuesta de A.

Solución:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(BA^t + 3B - 3B) = A^{-1}BA^t =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 13 & 6 \\ 2 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$