Examen de Matemáticas II (Junio 2016)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto). Estudiar la continuidad de f y calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)$.

b) (0,5 puntos). Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en $x = 2$.

c) (1,5 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$.

Solución:

a) La función es continua en cualquier punto distinto de 0, donde hacemos su estudio: Continuidad en $x = 0$: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0 \Longrightarrow$ la función es continua en R.

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\frac{-1}{1-x}}{-1} = 0$$

b) $f(x) = xe^{-x} \Longrightarrow f'(x) = e^{-x}(1-x)$

$$b = f(2) = 2e^{-2}; \;\; m = f'(2) = -e^{-2} \Longrightarrow y - 2e^{-2} = -e^{-2}(x-2)$$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{1-x} + \int_{0}^{1} xe^{-x}\, dx = -\frac{(\ln(1-x))^2}{2}\Big]_{-1}^{0} - e^{-x}(x+1)\Big]_0^1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 - 2e^{-1} = 0,5$

Problema 2 *(3 puntos)*

a) (1,5 puntos). Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A; B; C; D matrices cuadradas invertibles. Exprese X de la forma más simple posible.

b) (1,5 puntos). Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determine la matriz Y tal que $YB = A$.

Solución:

a) Vamos a aplicar la propiedad $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$:

$$X(CD)^{-1} = A+X(D^{-1}C^{-1}-B) \Longrightarrow X(CD)^{-1}-X(D^{-1}C^{-1}-B) = A \Longrightarrow$$

$$X((CD)^{-1} - (D^{-1}C^{-1} + B) = A \Longrightarrow XB = A \Longrightarrow X = AB^{-1}$$

b) $YB = A \Longrightarrow Y = AB^{-1}$:

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 & 1/2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean paralelos.

b) (0,5 puntos). Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) (1 punto). Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $x = y$.

Solución:

a)

$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \parallel \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2} \Longrightarrow a = -1$$

b)

$$\overrightarrow{u_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{u_{\pi_2}} \Longrightarrow \overrightarrow{u_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{u_{\pi_2}} = a + a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1/2$$

c) $\pi \equiv x - y = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi} = (1, -1, 0)$

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_{\pi_1}} \times \overrightarrow{u_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (a + 1, -(a + 1), a^2 - 1) =$$

$$(a + 1)(1, -1, a - 1) = \lambda(1, -1, 0) \Longrightarrow$$

$$a - 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Pero en este caso los planos son paralelos y, por tanto, este resultados no es válido y no se puede encontrar la recta r pedida para ningún valor de a.

Problema 4 *(2 puntos)* Dado el punto $P(2,1,-1)$, determine el punto simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0,2,-1)$; $B(1,-3,0)$ y $C(2,1,1)$.

Solución:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,-5,1) \\ \overrightarrow{AC} = (2,-1,2) \\ A(0,2,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & x \\ -5 & -1 & y-2 \\ 1 & 2 & z+1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - z - 1 = 0$$

Segimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos una recta $t \perp \pi / P \in r$:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,0,-1) \\ P_t = P(2,1,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -1 - \lambda \end{array} \right.$$

- Calculamos el punto de corte P' de t con π:

$$(2+\lambda) - (-1-\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow P'(1,1,0)$$

- El punto P' es el punto medio entre P y el punto que buscamos P'':

$$\frac{P'' + P}{2} = P' \Longrightarrow P'' = 2P' - P =$$

$$(2,2,0) - (2,1,-1) = (0,1,1)$$

Examen de Matemáticas II (Junio 2016) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x+ & & y & + & mz = & 1 \\ x- & & y & + & 2z = & -2 \\ 5x+ & & (m+1)y & + & 2z = & 4 \end{array} \right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores de m.

b) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo en el caso $m = 2$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad |A| = m^2 - 4 = 0 \Longrightarrow m = \pm 2$$

Si $m \neq \pm 2 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ = n$^{\text{o}}$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right); \ |A| = 0; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \ \ |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -28 \neq 0;$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A})$ y el sistema es incompatible.

Si $m = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right); \ |A| = 0; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$F_3 = 2F_1 - F_2 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) Si $m = 0$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x+ & y & & = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \\ 5x+ & y & + & 2z = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 7/2 \end{array}\right.$$

c) Si $m = 2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x+ & y & + & 2z = & 1 \\ x- & y & + & 2z = & -2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1/4 - \lambda \\ y = 7/4 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,5,3)$, $B(0,6,4)$, $C(2,4,2)$ y $D(2,3,1)$ y se pide:

a) (1 punto). Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono $ABCD$ es un paralelogramo.

b) (1 punto). Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) (1 punto). Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano $ABCD$ es el punto medio del paralelogramo.

Solución:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(0,1,1)\\ \overrightarrow{AC}=(2,-1,-1)\\ \overrightarrow{AD}=(2,-2,-2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -2\end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \text{son coplanarios}$$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = \sqrt{2}$ y $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{2}$, luego se trata de un paralelogramo.

b)

$$S = |\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = |\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -2\end{array}\right|| = 2|(0,1,-1)| = 2\sqrt{2}\ u^2$$

c) Se trata de una recta r que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
Calculamos el centro de este paralelogramo:

$$Centro = \frac{A+C}{2} = \left(1, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Calculamos el vector normal al plano π que contiene al paralelogramo:

$$\overrightarrow{u_\pi} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = 2(0,1,-1)$$

$$r: \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,1,-1)\\ P_r(1,\frac{9}{2},\frac{5}{2})\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=1\\ y=9/2+\lambda\\ z=5/2-\lambda\end{array}\right.$$

Problema 3 *(2 puntos)*

a) (1 punto). Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x)=12$, para todo $x\in R$ y además verifica: $f(1)=3$; $f'(1)=1$; $f''(1)=4$.

www.musat.net

b) (1 punto). Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in R$ y que además verifica:

$$\int_0^1 g(x)\,dx = 5; \quad \int_0^2 g(x)\,dx = 14$$

Solución:

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$, $f'''(x) = 6a$

$$\left\{\begin{array}{l} f'''(x) = 12 \Longrightarrow 6a = 12 \Longrightarrow a = 2 \\ f(1) = 3 \Longrightarrow a + b + c + d = 3 \\ f'(1) = 1 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 1 \\ f''(1) = 4 \Longrightarrow 6a + 2b = 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -4 \\ c = 3 \\ d = 2 \end{array}\right.$$

La función polinómica buscada es $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2$.

b) $g(x) = ax^2 + bx + c$, $g'(x) = 2ax + b$, $g''(x) = 2a$

$$g''(x) = 2a \Longrightarrow 2a = 6 \Longrightarrow a = 3$$

$$\int_0^1 (3x^2+bx+c)\,dx = x^3 + \frac{2bx^2}{2} + cx\bigg]_0^1 = \frac{b+2c+2}{2} = 5 \Longrightarrow b+2c = 8$$

$$\int_0^2 (3x^2+bx+c)\,dx = x^3 + \frac{2bx^2}{2} + cx\bigg]_0^2 = 2b+2c+8 = 14 \Longrightarrow b+c = 3$$

$$\left\{\begin{array}{l} b + 2c = 8 \\ b + c = 3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -2 \\ c = 5 \end{array}\right.$$

La función polinómica buscada es $g(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

Problema 4 *(2 puntos)* Estudie la continuidad y la derivabilidad en $x = 0$ y en $x = 1$ de $f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ |x\ln x| & \text{si} & x > 0 \end{array}\right.$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

Solución:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ |x\ln x| & \text{si} & x > 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccr} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ -x\ln x & \text{si} & 0 < x \le 1 \\ x\ln x & \text{si} & x > 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{ccr} 0 & \text{si} & x < 0 \\ -\ln x - 1 & \text{si} & 0 \le x < 1 \\ \ln x + 1 & \text{si} & x \ge 1 \end{array}\right.$$

www.musat.net

Continuidad en $x = 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (-x \ln x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(-\dfrac{\ln x}{1/x} \right) = \left[\dfrac{\infty}{\infty} \right] = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \left(-\dfrac{1/x}{-1/x^2} \right) = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Luego f es continua en $x = 0$ Continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} (-x \ln x) = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} (x \ln x) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

Luego f es continua en $x = 1$
Derivabilidad en $x = 0$: $f'(0^-) = 0 \neq f'(0^+) = +\infty$ y, por tanto no es derivable.
Derivabilidad en $x = 1$: $f'(1^-) = -1 \neq f'(1^+) = +1$ y, por tanto no es derivable.
Conclusión: La función f es continua en R y derivable en $R - \{0, 1\}$.

www.musat.net