Examen de Matemáticas II-Coincidente (Junio 2016) Selectividad-Opción A

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = & z-1 \\ y = & 2-3z \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = & 4+5z \\ y = & 4z-3 \end{cases}$, se pide:

a) (1,5 puntos). Estudiar su posición relativa y hallar la distancia entre ellas.

b) (1,5 puntos). Hallar la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta a r_1 y a r_2.

Solución:

a) $r_1 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-3,1) \\ P_{r_1}(-1,2,0) \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_{r_2}} = (5,4,1) \\ P_{r_2}(4,-3,0) \end{cases}$ y $\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}} = (5,-5,0)$

$[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}] = \begin{vmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -55 \neq 0 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

$$d(r_1,r_2) = \frac{|[\overrightarrow{P_{r_1}P_{r_2}}, \overrightarrow{u_{r_1}}, \overrightarrow{u_{r_2}}]|}{|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}|} = \frac{55}{\sqrt{426}} = \frac{55\sqrt{426}}{426}\, u$$

$$|\overrightarrow{u_{r_1}} \times \overrightarrow{u_{r_2}}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}| = |(-7,4,19)| = \sqrt{426}$$

b) Obtenemos la recta como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_{r_1}} = (-1,0,2) \\ \overrightarrow{u_{r_1}} = (1,-3,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 2x+y+z=0$$

$$\pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{OP_{r_2}} = (4,-3,0) \\ \overrightarrow{u_{r_2}} = (5,4,1) \\ O(0,0,0) \end{cases} \Longrightarrow \pi_2 : \begin{vmatrix} 4 & 5 & x \\ -3 & 4 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_2 : 3x+4y-31z=0$$

$$t : \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+4y-31z=0 \end{cases}$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto). Determinar los valores del parámetro a, para que se verifique la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) (1,5 puntos). Para $a = 2$, resolver la ecuación matricial $AXA^{-1} = B$.

c) (0,5 puntos). Calcular el determinante de la matriz $(2B)^{-1}$.

Solución:

a)

$$A^2 = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow a^2 = 1 \Longrightarrow a = \pm 1$$

b) $AXA^{-1} = B \Longrightarrow X = A^{-1}BA$:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 16 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$|(2B)^{-1}| = \frac{1}{|2B|} = \frac{1}{8|B|} = \frac{1}{32}$$

Problema 3 *(2 puntos)* Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos. ¿A qué precio deben vender la papeleta?
Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?
Solución:

x :precio de la papeleta.
$f(x) = x(5000 - (x-2)500) = -500x^2 + 6000x$
$f'(x) = -1000x + 6000 = 0 \Longrightarrow x = 6$
$f''(x) = -1000 \Longrightarrow f(6) = -1000 < 0 \Longrightarrow x = 6$ euros es un máximo que produciría un importe de $f(6) = 18000$ euros, si restamos el precio del ordenador tendríamos que se dona a la ONG la cantidad de $18000 - 600 = 17400$ euros.

Problema 4 *(3 puntos)* Se consideran las funciones $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{2}{x+1}$, definida para $x \neq -1$. Se pide:

a) (1,5 punto). Hallar el área del recinto del primer cuadrante limitado por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.

b) (0,5 punto). Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow -1} f(x)g(x)$.

Solución:

a) $2+x-x^2 = \dfrac{2}{x+1} \Longrightarrow x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3} \Longrightarrow$ el recinto de integración es entre 0 y $\sqrt{3}$ por ser en el primer cuadrante.

$$S_1 = \int_0^{\sqrt{3}} \left(2 + x - x^2 - \frac{2}{x+1}\right) dx = 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2\ln|x+1|\Big]_0^{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{3}{2} + \sqrt{3} - 2\ln|\sqrt{3}+1| = 1,22\,u^2$$

b)

$$\lim_{x \longrightarrow -1} f(x)g(x) = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{4 + 2x - 2x^2}{x+1} = \lim_{x \longrightarrow -1} \frac{(x+1)(-2x+4)}{x+1} = 6$$

Examen de Matemáticas II-Coincidente (Junio 2016) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcrl} ax- & y & + & z = 0 \\ x+ & y & + & az = 0 \\ ax+ & 4y & + & 2z = a \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos). Discutirlo según los valores del parámetro a.

b) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = 1$.

c) (0,5 puntos). Resolverlo, si es posible, para $a = -1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} a & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ a & 4 & 2 & a \end{array}\right) \quad |A| = -5a^2+a+6 = 0 \Longrightarrow a = -1, \;\; a = 6/5$$

Si $a \neq -1$ y $a \neq 6/5 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y sería un sistema compatible determinado.
Si $a = 6/5$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 6/5 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6/5 & 0 \\ 6/5 & 4 & 2 & 6/5 \end{array}\right); \; |A| = 0; \left|\begin{array}{rr} 6/5 & -1 \\ 1 & 1 \end{array}\right| = 11/5 \neq 0 \Longrightarrow \text{ Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0; \;\; |A_2| = \left|\begin{array}{rrr} 6/5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6/5 & 4 & 6/5 \end{array}\right| = 66/25 \neq 0;$$

Luego Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) <$ y el sistema es incomcompatible.

Si $a = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & -1 \end{array}\right); \; |A| = 0; \left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{array}\right| = 5 \neq 0 \Longrightarrow \text{ Rango}(A) = 2$$

$F_2 = -F_1 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado.

b) Si $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x- & y & + & z = & 0 \\ x+ & y & + & z = & 0 \\ x+ & 4y & + & 2z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

c) Si $a = -1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x+ & y & - & z = & 0 \\ -x+ & 4y & + & 2z = & -1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1/5 + 6/5\lambda \\ y = -1/5 - 1/5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x-4} + 2x - 1 & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$,

se pide:

a) (1 punto). Hallar las asíntotas de la curva $y = f(x)$.

b) (1 punto). Determinar los posibles extremos relativos y puntos de inflexión de $y = f(x)$.

c) (1 punto). Calcular $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Solución:

a)
- Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

- Horizontales: No hay

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$$

- Oblicuas: $y = mx + n \Longrightarrow y = 2x - 1$

$$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 2 = \infty$$

$$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - mx) = -1$$

b) $f'(x) = -\dfrac{9}{2(x-2)^2} + 2$ si $x \neq 2$, $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{7}{2}, \ x = \dfrac{1}{2}$

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, 7/2)$	$(7/2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente

La función tiene un Máximo en el punto $(1/2, -3)$ y un Mínimo en el punto $(7/2, 9)$.
$f''(x) = \dfrac{9}{(x-2)^3} \neq 0 \Longrightarrow$ no ha puntos de inflexión.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa $\cap$	cóncava $\cup$

Luego f es cóncava en el intervalo $(2, \infty)$ y convexa en $(-\infty, 2)$.

c)

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{9}{2x-4}+2x-1\right)dx=\frac{9}{2}\ln|x-2|+x^2-x\Big]_{-1}^{1}=-\frac{9\ln 3}{2}-2=-6,94$$

Problema 3 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi\equiv x-y+2z+3=0$, el punto $A(1,1,3)$ y la recta $r\equiv x=y-2=\dfrac{z}{2}$, se pide:

a) (1 punto). Hallar la distancia del punto A a la recta r.

b) (1 punto). Hallar la proyección del punto A sobre el plano π.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,2)\\ P_r(0,2,0)\end{array}\right.,\quad A(1,1,3),\quad \overrightarrow{P_rA}=(1,-1,3)$$

a)

$$d(A,r)=\frac{|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}|}{|\overrightarrow{u_r}|}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}\,u$$

$$|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{u_r}|=|\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\1&-1&3\\1&1&2\end{array}\right|=|(-5,1,2)|=\sqrt{30}$$

b) Seguimos el siguiente procedimiento:

- Calculamos la recta $t\perp\pi/A\in t$:

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,-1,2)\\ P_t=A(1,1,3)\end{array}\right.\Longrightarrow t:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=3+2\lambda\end{array}\right.$$

- Calculamos A' proyección de A como punto de corte de t y π:

$$(1+\lambda)-(1-\lambda)+2(3+2\lambda)+3=0\Longrightarrow\lambda=-\frac{3}{2}$$

$$A'\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2},0\right)$$

Problema 4 *(2 puntos)* Dada una recta r cuyo vector director es $\overrightarrow{v}=(a,b,c)$ con $a,b,c>0$, se pide:

a) (1,5 puntos). Si r forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje OX y de $\frac{\pi}{4}$ con el eje OY, determinar el ángulo que forma la recta con el eje OZ.

b) (0,5 puntos). Si $\overrightarrow{v}=(1,5,3)$, hallar la ecuación del plano perpendicular a la recta y que contiene al punto $A(3,0,1)$.

Solución:

a) Tenemos que $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$:

$$\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\gamma = 1 \Longrightarrow \frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cos^2\gamma = 1 \Longrightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2} \Longrightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}$$

b) $\pi : x+5+3z+\lambda = 0$ sustituyendo el punto $3+0+3+\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -6$:

$$\pi : x + 5y + 3z - 6 = 0$$