Examen de Matemáticas 2ºBachillerato(CN)

Noviembre 2015

Problema 1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & (k+1)y+ & 2z= & -1 \\ kx+ & y+ & z= & k \\ (k-1)x- & 2y- & z= & k+1 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k.
2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

(Septiembre 2007 - Opción A)
Solución:

1. $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (k+1) & 2 & -1 \\ k & 1 & 1 & k \\ (k-1) & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right)$$

   $$|A|=2k^2-5k+2=0 \Longrightarrow k=\frac{1}{2},\ \ k=2$$

   - Si $k\neq\frac{1}{2}$ y $k\neq 2 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=$Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
   - $k=\frac{1}{2}$:

     $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{array}\right)$$

     Como $|A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 \end{array}\right|=-1/2 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$. Por otra parte

     $$\left|\begin{array}{ccc} 3/2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1/2 \\ -2 & -1 & 3/2 \end{array}\right|=-3\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

     Como Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.
   - $k=2$:

     $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Observamos que la tercera fila es la diferencia de la segunda menos la primera, y como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

2.
$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & 2z = & -1 \\ 2x+ & y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 7/5 - 1/5\lambda \\ y = -4/5 - 3/5\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 2 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.
2. (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

(Septiembre 2008 - Opción A)

Solución:

1.
$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -2(a+1)(a^2+a-1) = 0 \Longrightarrow a = -1,\ a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

En los tres casos el Rango$(A) = 2$

2. Si $a \neq -1$ y $a \neq \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ la matriz A es invertible.

Si $a = -1$ o $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ la matriz A no es invertible.

Cuando $a = 1$:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 3 *(2 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.
(Septiembre 2008 - Opción B)

Solución:

x: n^{o} de billetes de 50 euros

y: n^{o} de billetes de 20 euros

z: n^{o} de billetes de 10 euros

$$\left\{\begin{array}{c} 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x + y + z = 225 \\ x + z = 2y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 100 \\ y = 75 \\ z = 50 \end{array}\right.$$

Problema 4 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{array}\right| = 0$$

(Modelo 2009 - Opción A)

Solución:

$$\left|\begin{array}{ccc} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{array}\right| = (x+1)(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 2(x-1) & 1 & x+1 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ x-1 & 1 & x+1 \end{array}\right| =$$

$$(x+1)^2(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 2(x-1) & 1 & 1 \\ x-1 & x+1 & 1 \\ x-1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left[\begin{array}{c} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}\right] = (x+1)^2(x-1)\left|\begin{array}{ccc} 2(x-1) & 1 & 1 \\ -(x-1) & x & 0 \\ -(x-1) & 0 & 0 \end{array}\right| =$$

$$(x+1)^2(x-1)^2\left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{array}\right| = -(x^2-1)^2\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x & 0 \end{array}\right| = x(x^2-1)^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$